UNIVERSITE DE CAEN
U.F.R de SCIENCES

Année Universitaire 2007-2008
Examen terminal - session de septembre

Licence de Sciences et Technologie 1
EM21 - Epreuve d'analyse - durée : 2 heures

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage **après** *la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies intercalaires.*

Les exercices sont indépendants. Certains exercices ou certaines questions ne s'adressent qu'aux étudiants de la voie PMM ou de la voie MATHS : c'est précisé le cas échéant.

Exercice 1 (Commun à tous les candidats)

1) Calculer l'integrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)e^t dt$ (utiliser des intégrations par partie).

2) On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin t\cos(t)}{(2\cos(t)-3)(1+2\cos^2 t)}dt$.

a) Prouver que $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x-3)(x^2+2)}dx$ (on pourra poser $x = 2\cos(t)$ en expliquant en détail les calculs qui s'ensuivent).

b) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x^2+2)}$.

c) Donner des primitives de $\dfrac{1}{x-3}, \dfrac{x}{x^2+2}, \dfrac{1}{x^2+2}$ sur $[1,2]$.

d) Donner la valeur de I.

Exercice 2 (Commun à tous les candidats)

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange :

Si $a < b$ et si f est une fonction n fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Par ailleurs, on donne l'approximation suivante, à 10^{-5} près par défaut :

$$e \equiv 2,71828.$$

1) Montrer qu'on a : $1 < \sqrt{e} < 3$.

2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4 e^x}{24}.$$

3) Donner un nombre rationnel qui soit une approximation par défaut de $\sqrt{e}$ à 10^{-2} près. Donner le début de son écriture décimale.

Exercice 3 (Uniquement voie maths)

1ère partie : On considère deux fonctions u et v définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, telles que : $\forall x, u(x) > 0$ et que $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} u(x), \ell' = \lim\limits_{x \to x_0} v(x)$ soient définies dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On pose $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

On veut étudier différents cas où, à partir des limites ℓ et ℓ', on peut ou on ne peut pas en déduire le comportement de $f(x)$ quand x tend vers x_0.

a) Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell' \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x)$ a une limite quand $x \to x_0$, en utilisant les propriétés de la fonction ln.

b) Que vaut la limite de $f(x)$ dans les cas suivants (forme indéterminée "$(+\infty)^0$") :

$$u(x) = e^x, v(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = +\infty \text{ ;}$$

$$u(x) = e^x, v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = +\infty \text{ ;}$$

$$u(x) = e^x, v(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = +\infty \text{ ;}$$

$$u(x) = e^x, v(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x_0 = +\infty \text{ ;}$$

c) Donner des exemples, comme au b), de deux cas de formes indéterminées avec $\ell = \ell' = 0$, donnant des limites différentes pour la fonction f en x_0.

2ème partie : On veut, sans utiliser les logarithmes ni les exponentielles, prouver que la suite $u_n = \sqrt[n]{n}$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

(1) Montrer qu'on a : $\forall n \geq 1, u_n \geq 1$.

(2) On se donne un réel $\varepsilon > 0$ fixé.

(a) Montrer : $\forall n \geq 2, \quad (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n.\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$.

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2, \quad n > \dfrac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n-1$.

(c) Déduire du (b) qu'il existe un rang N_0 tel que :

$$\forall n \geq N_0, \quad 1+\varepsilon > u_n$$

.

(3) Prouver, en revenant aux définitions, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(4) Quel rapport voyez-vous entre les deux parties du problèmes ?

Exercice 4 (Uniquement voie PMM) On pose : $\forall n \geq 0, I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{x^2+1}dx$.

(a) Que vaut I_0 ?

(b) Prouver qu'on a : $\forall n, |I_n| \leq \dfrac{2}{2n+1}$. Que dire de la suite $(I_n)_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$?

(c) Prouver qu'on a : $\forall n \geq 0, I_{n+1} = \dfrac{2}{2n+1} - I_n$.

(d) Prouver par récurrence sur n, en utilisant le (c), qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n-3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{2}{1} + (-1)^n\frac{\pi}{2} = 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n\frac{\pi}{2}.$$

(e) Prouver qu'on a : $\dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{n \to +\infty}(1 - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1})$.