L 1 - Semestre 2 - Année 2006-2007 **Analyse**
Terminal de septembre **EM21T1**

Durée : 2 heures

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

- Les calculatrices et documents sont interdits pendant l'épreuve. Les téléphones portables sont interdits dans la salle d'examen

- Le sujet comporte deux pages.

- LES EXERCICES 1-2-3 SONT À FAIRE PAR TOUS LES ÉTUDIANTS. LES ÉTUDIANTS DE LA VOIE PMM DOIVENT FAIRE L'EXERCICE 4. LES ÉTUDIANTS DES VOIES MATH-INFO FONT LE 5 ET LE 6. LES COPIES SONT À RENDRE SUR DES TAS SÉPARÉS

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I_1 = \int_1^e \ln(t)dt$ (Indication : on pourra faire une intégration par partie).

b) $I_2 = \int_1^4 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}}$ (Indication : on pourra poser $u = \sqrt{t}$).

Exercice 2

On pose pour $x > 1$: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

a) Donner la décomposition en éléments simples réels de la fraction rationnelle $f(x)$.

b) Donner des primitives sur $]1, +\infty[$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}, x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

c) Donner la forme générale des primitives de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3

On se donne une fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifiant $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
Pour tout $x > 0$, on pose : $g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t)dt$.

1) Ecrire la définition de : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

2) On se donne deux réels A, B et on suppose qu'on a : $\forall t \geq B, f(t) \geq A$. Montrer que : $\forall x \geq B, g(x) \geq A$.

3) Prouver qu'on a : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

/TSVP/ **/TSVP/** **/TSVP/** **/TSVP/**

Exercice 4 - UNIQUEMENT POUR LA VOIE PMM

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

i) $u_0 = 2$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 7}{u_n + 3}$.

1) Calculer u_1, u_2 comme des quotients d'entiers, et donner les deux premiers chiffres après la virgule de leur écriture décimale.

2) Prouver que pour tout entier n, on a : $u_n > 0$.

$$\text{On pose pour tout } n : v_n = \frac{u_n - \sqrt{7}}{u_n + \sqrt{7}}.$$

3) Prouver que v_n est bien définie pour tout n.

4) Montrer qu'on a pour tout n : $v_{n+1} = \dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} v_n$.

5) Donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n et du réel $a = \dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$.

6) Donner la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{7}$.

7) Prouver qu'on a : $0 < a < \dfrac{1}{10}$. Prouver aussi qu'on a : $-\dfrac{1}{2\sqrt{7}} < v_0 < 0$.

8) Montrer que : $\sqrt{7} - u_n = -2\sqrt{7}\dfrac{v_n}{1-v_n}$, et en déduire l'encadrement : $u_n < \sqrt{7} < u_n + 10^{-n}$. Donner une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près.

Exercice 5 - UNIQUEMENT VOIES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Le nombre e est le nombre habituel, base des exponentielles et logarithmes népériens.

On considère l'ensemble A des réels qui s'écrivent $\ln(n) - \ln(m)$, pour un couple (n, m) de naturels non nuls tels que $n - em < 0$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, x = \ln(n) - \ln(m) \text{ et } n - em < 0\}.$$

1) Montrer que A est majoré par 1.

2) a) On fixe $\varepsilon > 0$ un réel. Prouver qu'on peut trouver un couple (n, m) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$e^{1-\varepsilon} < \frac{n}{m} < e.$$

Indication : on pourra utiliser la densité des rationnels dans $\mathbb{R}$.

b) Prouver que : $\sup(A) = 1$.

3) A est-il minorée ?

Exercice 6 - UNIQUEMENT VOIES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, on pose $u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln(x)$.

Dans les questions 1),2), 3) et 4), on fixe l'entier n et on considère la fonction définie par : $\forall x > 1, f(x) = \sqrt[n]{x}$.

1) Calculer $u_n(1)$ et $f(1)$.

2) Pour un réel $x > 1$, calculer les dérivées $f'(x)$ et $u_n'(x)$.

3) a) Prouver que pour $x \geq 1$, on a : $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{n}$.

b) Prouver que pour tout $x \geq 1$, on a : $0 \leq f(x) - f(1) \leq \dfrac{1}{n}(x-1)$.

4) a) Prouver que : $\forall x \geq 1,\ 0 \leq u_n'(x) \leq \dfrac{1}{n}(x-1)$.

b) Prouver que pour tout $x \geq 1$, on a : $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{2n}(x-1)^2$.

5) On fixe $x \geq 1$. Prouver, en calculant la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$.

6) On fixe $x \in]0,1[$. Montrer qu'on a encore : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$.

Indication : Pour $x \in]0,1[$, on pourra poser $y = \dfrac{1}{x}$ et comparer pour tout n les nombres $u_n(x)$ et $u_n(y)$.