Analyse - EM21

Terminal

Durée : 2 heures.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

- Les calculatrices et documents sont interdits pendant l'épreuve. Les calculs devront donc être réalisés à la main...

- Le sujet comporte deux pages.

EXERCICE 1 : On considère l'ensemble F des réels qui s'écrivent $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ pour des entiers n, m tels que : $2 \leq n < m$, $F = \{\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, 2 \leq n < m\}$.

a) Montrer que F a un plus grand élément, et donner sa valeur.

b) Soit $c > 0$ un réel. Montrer : $\exists x \in F,\ 0 < x < c$.

c) F a-t-il une borne inférieure ? un plus petit élément ? (on donnera leurs valeurs s'ils existent).

EXERCICE 2 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $K = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$.

b) $J = \displaystyle\int_0^1 (1-t)e^t dt$ (Indication : faire une intégration par partie).

c) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\cos(2t)}{2-\cos(t)} dt$ (Indication : faire le changement de variable $u = \cos(t)$).

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = e^x - 2\cos(\pi.x)$.

a) Justifier que f est continue et dérivable.

b) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

c) Prouver qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

d) Prouver qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que : $\sin(c)(e^c + 2\pi\sin(\pi.c)) + \cos(c)f(c) = 0$ (Indication : on pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto \sin(x)f(x)$ sur un intervalle convenablement choisi).

PROBLÈME

Première partie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs ; on veut prouver le résultat suivant :

Supposons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On suppose donc que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

1) Rappeler la définition de la propriété : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

2) Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que : $\forall n \geq N_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$. On garde cette valeur de N_0 dans la suite.

3) Montrer qu'on a : $\forall n \geq N_0, u_n \leq \frac{u_{N_0}}{2^{n-N_0}}$ (on pourra raisonner par récurrence sur $n \geq N_0$).

4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

TSVP

Deuxième partie - Applications

1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = +\infty$.

a) On pose $\forall n, u_n = \dfrac{1}{v_n}$. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite quand $n \to +\infty$, et donner sa valeur.

b) Que peut-on dire de la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$?

2) On se donne $c \in \mathbb{R}_+^*$, et on pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{c^n}{n!}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

b) Que peut-on dire de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$?

c) Etudier le même problème avec $c < 0$.