Terminal - mai 2010

__EXERCICE 1 :__ On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan(x)}{\cos^2(x)+3}dx$.

(a) A l'aide d'un changement de variable, prouver que : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3dt}{t(t^2+3)}$.

(b) Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $t \mapsto \dfrac{3}{t(t^2+3)}$.

(c) Que vaut I ?

__EXERCICE 2 :__ On pose $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$.

(a) Trouver deux réels A, B, tels que le domaine de définition de f soit : $D_f =]-\infty, A[\cup]B, +\infty[$.

(b) Prouver que, si on pose $v(t) = \ln(t) + \frac{1}{t} - 1$, on a pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = v(\frac{x+1}{x})f(x)$.

(c) Donner le domaine de définition, le tableau de variation, et le signe de $v(t)$ en fonction de t.

(d) Donner le tableau de variation complet de f, et donner l'allure du graphe de f. On portera un soin tout particulier au comportement de $f(x)$ aux bornes du domaines de définition.

__EXERCICE 3 :__

(a) Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale $J_1 = \displaystyle\int_1^e \ln(t)dt$.

(b) Prouver, à l'aide d'une intégration par partie, que l'intégrale $J_2 = \displaystyle\int_1^e \ln^2(t)dt$ est égale à $e - 2J_1$.

(c) Plus généralement, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $J_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(t)dt$, prouver la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{n+1} = e - (n+1)J_n.$$

! - On ne demande pas de calculer l'expression de J_n en fonction de n - !

__EXERCICE 4 :__

(A) On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et on fait l'hypothèse que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \in [0,1[.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang N_0 tel que : $\forall n \geq N_0, x_{n+1} \leq k.x_n$.

(b) Prouver la majoration suivante : $\forall n \geq N_0, 0 < x_n \leq \dfrac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.

(c) Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(B) __Applications :__ On fixe un paramètre réel strictement positif $R > 0$, et on pose pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 R^n}.$$

(a) Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (et bien sûr de R), le rapport : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, et en déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que si on a pris une valeur de R telle que : $R > 4$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(c) Montrer que si $0 < R < 4$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

__*On rappelle les formules suivantes, à toutes fins utiles :*__

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + x^n\varepsilon_1(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + x^n.\varepsilon_2(x),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]-1,1[$, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont des fonctions de limite nulle en 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = 0.$$