UNIVERSITE DE CAEN **Année Universitaire 2008-2009**

U.F.R de SCIENCES

Licence 1 **EM21 - Analyse** **Durée: 1h45**

Aucun document ni calculatrice, interdiction des téléphones portables.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom et son groupe (A, B, ou PMM) dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numero de place sur chacune des copies. RENDRE UNE COPIE SÉPARÉE POUR L'ANALYSE ET POUR L'ALGÈBRE.

Les exercices et problèmes sont indépendants.

DANS CE CADRE L'EXAMEN POUR LES ÉTUDIANTS DE LA VOIE MATH

Exercice (voie Math) :

(1) Calculer la primitive $F(x) = \int Arctan(x)dx$ au moyen d'une intégration par partie.

(2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}dx$. On pourra, pour ce faire, décomposer en élément simple la fraction rationnelle intégrée.

PROBLÈME 1 (voie Math)

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Pour quelle raison les ensembles $\{f(x) \text{ où } x \in [a, b]\}$, $\{f'(x) \text{ où } x \in [a, b]\}$ admettent un plus grand élément et un plus petit élément ?

(2) Si $f(a) = f(b)$, quel théorème du cours permet de déterminer $\min\{|f'(x)| \text{ où } x \in [a, b]\}$?

(3) Vérifier que $\sup\{|f'(x)| \text{ où } x \in]a, b[\}$ existe.

(4) Soit F une primitive de f. En prenant pour points a et b, écrire la formule de Taylor-Lagrange de F jusqu'à l'ordre 2 (on s'arrête aux dérivées secondes de F).

(5) On suppose $f(a) = 0$. On pose $M_1 := \sup\{|f'(x)| \text{ où } x \in]a, b[\}$. En déduire l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}M_1.$$

PROBLÈME 2 (voie Math)

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction : $f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \end{array}$

Les parties 1,2,3,4 sont indépendantes ! De plus, il est possible de traiter une question en admettant les résultats des questions précédentes.

(1) (a) Vérifier que la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est une bijection décroissante de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
(b) Rappeler la formule donnant $(g^{-1})'$ en fonction de g' et g. Calculer $(g^{-1})'$.

(2)(a) Soit $x \geq 1$. Vérifier que $\{\frac{1}{\ln t} \,|\, t \in [x, x^2]\}$ admet un plus petit élément et calculer sa valeur.
(b) Pour $x \geq 3$, en déduire que $f(x) \geq \frac{x}{\ln(x)}$.
(c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et donner sa valeur.

(3) (a) Calculer une primitive de $\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}$ sur $]1, +\infty[$. En déduire : $\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \ln 2 + \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln t}dt.$
(b) Vérifier que $\lim_{t\to1} \frac{t-1}{t \ln t} = 1$ existe et donner sa valeur. Indication: on pourra poser $u = t - 1$ et faire un DL en la variable u en 0.
(c) Vérifier qu'il existe $c \in]x, x^2[$ tel que $\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln t}dt = (x^2 - x)\frac{(c-1)}{c \ln c}$.
(d) En déduire que $\lim_{x\to1} f(x)$ existe et donner sa valeur.

(4) Soit H une primitive de $\frac{1}{\ln x}$ sur $]1, +\infty[$. Exprimer f en fonction de H. En déduire une expression de f' sur $]1, +\infty[$.

(5) Tracer le graphe de f.

DANS CE CADRE L'EXAMEN POUR LES ÉTUDIANTS DE LA VOIE PMM

Exercice (voie PMM) :
(1) Calculer la primitive $F(x) = \int Arctan(x)dx$ au moyen d'une intégration par partie.

(2) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(t)\sin(t)dt$ au moyen du changement de variable $u = \cos(t)$.

PROBLÈME (voie PMM) : A propos d'une fonction biscornue.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f telle que $f(x) = e^{x-\tan^2(x)}$ quand ce nombre est défini, $f(x) = 0$ sinon.

Par ailleurs, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on désignera par I_n l'intervalle $]n.\pi - \frac{\pi}{2}, n.\pi + \frac{\pi}{2}[$. Ainsi :

$$..., \quad I_{-1} =]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[, \quad I_0 =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad I_1 =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \quad I_2 =]2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}[=]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[, ...$$

On pose enfin $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$.

(1) Montrer que f est continue en tout point, même aux points où $f(x) = 0$ (qu'on précisera).

(2) (i) Montrer qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq e^x$.
(ii) Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

(3) (i) Que vaut, si $n \in \mathbb{N}$, $f(n\pi)$?
(ii) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} f(n\pi) = +\infty$.
(iii) Prouver qu'on peut trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$, et telles que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = +\infty$.
(iv) Que dire de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

(4) (i) Calculer, pour $x \in A$, $f'(x)$.
(ii) Montrer que la fonction $D : x \mapsto 1 - 2(\tan(x) + \tan^3(x))$, est définie sur A, et strictement du même signe que $f'(x)$ sur A.
(iii) Montrer que D est $\pi-$périodique, et strictement décroissante sur I_0.
(iv) En déduire qu'il existe un $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$, tel que f ait un maximum local strict en chaque point $\alpha + n\pi \in I_n$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.
(v) Donner tous les extrema locaux de f et l'allure de son tableau de variation.
(vi) Tracer le graphe de f. ON NE DEMANDE PAS UN TRACÉ PRÉCIS MAIS UN SCHEMA DONNANT L'ALLURE DE LA COURBE, UN SCHEMA SIMPLE, SOBRE, PROPRE ET JOLI. PAPIER MILLIMÉTRÉ INTERDIT.

(5) On donne le $\mathrm{DL}_4(0)$: $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\alpha(x), \lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.
(i) Prouver : $\forall h, 0 < |h| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^2(\frac{\pi}{2} + h) = \frac{1}{\tan^2(h)}$.
(ii) Donner un $DL_4(0)$ de $h \mapsto h^2 - \tan^2(h)$.
(iii) Calculer le réel ℓ tel que : $\lim_{h\to 0, h\neq 0} (\frac{1}{\tan^2(h)} - \frac{1}{h^2}) = \ell$.

On fixe pour les deux dernières questions du problème un entier $N \in \mathbb{Z}$, et on pose $X = N.\pi + \frac{\pi}{2}$.

(iv) Prouver qu'il existe une fonction G et un réel L tels que :
(a) $\forall h, 0 < |h| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(X + h) = e^{-\frac{1}{h^2}} G(h)$.
(b) $\lim_{h\to 0} G(h) = L$.
(v) Si p est un entier naturel non nul, la fonction f a-t-elle un développement limité à l'ordre p en X ? Si oui, lequel, si non, pourquoi ?