**UNIVERSITE DE CAEN** — **Année Universitaire 2007-2008**
**U.F.R de SCIENCES** — **Session de juin**

**Licence de Sciences et Technologie 1**
**M21 Epreuve d'analyse**
**Durée : 2 heures**

---

**Mathématiques et informatique.**
**Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.**

---

*Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage* **après** *la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies intercalaires. Interdiction des téléphones portables.*

**Les exercices sont indépendants.**

**Exercice 1** ***Commun à tous les candidats :***

*Calculer les integrales suivantes :*

$$\int_0^1 t(t-1)e^{-t}dt.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{3-\sin^2 t}dt$$

**Exercice 2** *Commun à tous les candidats :*

*Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_2^{-3} \frac{2t-5}{t^2-6t+10}dt.$$

*Décomposer la fraction rationnelle* $f(x) = \frac{4t^2+9t+15}{(t+1)(t^2+6t+10)}$ *en éléments simples, en déduire la valeur de l'intégrale suivante :*

$$\int_2^3 f(t)dt$$

**Exercice 3** ***Exercice reservé aux étudiants de L1 Mathématiques.***

*Le but de cet exercice est de décrire certaines propriétés d'une fonction* $f$ *indéfniment dérivable sur l'intervalle* $[0,1]$ *sans connaître son expression.*

*On considère une fonction* $f$ *indéfiniment dérivable sur* $[0,1]$ *et telle que* $f(0) = -1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ *et* $f"(x) = f^2(x) + 1$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

1. *Calculer* $f"(0)$. *Calculer ensuite* $f^{(3)}(x)$ *et* $f^{(4)}(x)$ *en fonction de* $f(x)$ *et de* $f'(x)$. *En déduire les valeurs de* $f^{(3)}(0)$ *et de* $f^{(4)}(0)$. *Ecrire le développement limité de* $f(x)$ *au voisinage de* $0$ *à l'ordre* $4$ .

2. *Montrer que $f'$ est croissante sur l'intervalle $[0,1]$ et en déduire que $f'(x)$ est positive sur $[0,1]$. Montrer que $f$ est croissante sur $[0,1]$.*
3. *Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f"(x) \geq 1$ puis que $f'(x) \geq x + \frac{1}{2}$ et en déduire que $f(1) - f(0) \geq 1$ et que $f(1) \geq 0$. ( On pourra utiliser la positivité de l'intégration ).*
4. *Montrer qu'il existe un seul réèl $\alpha \in ]0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

   *On rappelle la formule de Taylor Lagrange à l'ordre $2$ au voisinage de $x_0$ : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f"(z)}{2}(x - x_0)^2$ où $z$ est comprise entre $x$ et $x_0$.*
5. *On se place sur l'intervalle $[0,\alpha]$. Quel est le signe de $f(x)$ sur cet intervalle ? En déduire que $f^2$ est une fonction décroissante sur $[0,\alpha]$ et que $1 \leq f"(x) \leq 2$. En déduire que*
$$f(x) \leq x^2 + \frac{x}{2} - 1.$$
6. *Montrer que*
$$\alpha \geq \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

**Exercice 4** ***Exercice réservé aux étudiants de PMM.***

*On rappelle que la fonction :*
$$\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
*est une fonction bijective qui possède une réciproque dérivable notée* $\arctan$.

1. *En utilisant la relation $\tan(\arctan(x)) = x$, montrer que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.*
2. *On se donne un entier $n > 0$.*

   *a) Donner le $DL_n(0)$ de la fonction $D : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.*

   *b) Que valent $D^{(n)}(0)$ et $\arctan^{(n+1)}(0)$ ?*
3. *On se donne un réel $X > 0$. Montrer qu'il existe un réel $c$ vérifiant :*

   *(i)* $\arctan(X) = X - \dfrac{X^3}{3} + \dfrac{X^5}{5} - \dfrac{X^7}{7} + \dfrac{X^8 \arctan^{(8)}(c)}{8!}$

   *(ii)* $0 < c < X$.
4. *Démontrer que $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ si ni $x$, ni $y$ , ni $x+y$ ne sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En déduire que si $a$ et $b$ sont tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ alors :*
$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan \frac{a+b}{1-ab}.$$
5. *Soit $a = \frac{1}{2}$, déterminer $b$ tel que :* $\arctan(a) + \arctan(b) = \dfrac{\pi}{4}$.
6. *On va chercher à évaluer $\pi$ avec une précision de $e = 10^{-2}$. Pour ce faire on admettra que, en reprenant les notations du 3), on a :*

$\forall X \in [0, \frac{1}{2}]$, $\left|\arctan^{(8)}(c)\right| \leq \frac{8!X}{9}$. *Montrer qu'en utilisant le 3) pour* $X = \dfrac{1}{2}$ *et* $X = \dfrac{1}{3}$, *on peut obtenir une évaluation avec la précision demandée.*

7. *Calculer une valeur approchée de* $\pi$ *à* $10^{-2}$ *prés. Pour éviter l'usage de la calculatrice les puissances de* $\dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{1}{3}$ *figurent dans le tableau suivant :*

| $n$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $(\frac{1}{2})^n$ | 0.5000 | 0.1250 | 0.0312 | 0.0078 |
| $(\frac{1}{3})^n$ | 0.3333 | 0.0370 | 0.0041 | 0.0005 |