Les étudiants composeront sur une copie séparée de la copie d'algèbre, et ils indiqueront EN CLAIR leur groupe de TD sur la copie (Maths groupe A, Maths groupe B, ou PMM).

Partiel 1 - Ensemble $\mathbb{R}$ et suites.

Exercice 1 (voies PMM et Math) : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels par les conditions : (a) $u_0 = 2$; (b) $\forall n, u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 5}{3 + u_n}$.

(1) Donner la valeur, sous forme de quotient d'entiers, des nombres u_1 et u_2.

(2) Trouver deux nombres A et B tels que, pour tout n, on ait : $u_{n+1} = A + \dfrac{B}{3 + u_n}$.

(3) Montrer que : $\forall n, 2 \leq u_n \leq 3$ (on pourra procéder par récurrence).

(4) (i) Montrer qu'on a : $\forall n, u_{n+1} - \sqrt{5} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+u_n}.(u_n - \sqrt{5})$.

(ii) Montrer qu'on a : $\forall n, |u_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{5}|u_n - \sqrt{5}|$

(iii) En déduire que : $\forall n, |u_n - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{4 \times 5^n}$.

(5) Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

(6) Donner une approximation décimale de $\sqrt{5}$ à 10^{-2} près en utilisant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (voies PMM) : Résoudre le système d'inéquations dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} & > & x \\ x^2 - x - 1 & \geq & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions admet-il des bornes supérieures et inférieures ? Des éléments minimum et maximum ?

Exercice 3 (voie PMM) : On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :

$$\text{(a) } v_0 = 2 \text{ ; (b) } \forall n, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n^2 + v_n + 1}.$$

(1) Montrer que cette suite est positive (c'est-à-dire : $\forall n, u_n \geq 0$) et croissante.

(2) (i) Montrer que si cette suite convergeait vers un réel ℓ, on aurait : $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^2 + \ell + 1}$.

(ii) Est-ce possible ? Qu'en conclure ? Quel est le comportement à l'infini de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4 (voie Math) : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \geq 1, v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(1) Prouver que v est une suite croissante.

(2) Prouver qu'on a : $\forall n \geq 1, v_{2n} - v_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

(3) Etudier le comportement à l'infini de la suite v.

Exercice 5 (voie Math) : Soit E l'ensemble des nombres réels qui s'écrivent $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ pour deux entiers n, m tels que $0 < n < m$: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (n,m) \in \mathbb{N}^2, 0 < n < m \text{ et } x = \sqrt{m} - \sqrt{n}\}$.

(1) Montrer que $E \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

(2) (i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - 1 \in E$.

(ii) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}$?

(iii) Prouver que E n'est pas majoré, en revenant à la définition de cette notion.

(3) (i) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} < \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \dfrac{1}{2.\sqrt{n}}$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Montrer qu'on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$.

(iii) Montrer que E admet 0 pour borne inférieure.

(iv) E admet-il un élément minimum ? Si oui, lequel ? Si non, pourquoi ?