UNIVERSITE DE CAEN **Année Universitaire 2007-2008**

U.F.R de SCIENCES **Partiel**

Licence de Sciences et Technologie 1

M21 Epreuve d'analyse

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage **après** *la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies intercalaires.*

Les exercices sont indépendants. Certains exercices ou certaines questions ne s'adressent qu'aux étudiants de la voie PMM ou de la voie MATHS : c'est prcis le cas chant.

Pour la voie PMM, le sujet comporte DEUX pages.

Exercice 1 :

1. On pose $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x^2 - 5|x| + 6 < 0\}$. Exprimer E comme une réunion d'intervalles et calculer la borne supérieure et la borne inférieure de E.
2. **(UNIQUEMENT VOIE MATHS)**
   Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $E_a = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x^2 - 5|x| + a < 0\}$. Calculer, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E_a.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1. $$\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\frac{3^n + n.\sin(n) + 1}{2^{2n+1} + \log(n) + 5}$$
2. $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + \log(n) + 2}{n^3 + n + 1}$$

Exercice 3 (UNIQUEMENT VOIE MATHS) :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Etudier le comportement de la suite u_n pour toute valeur de a. De plus, pour tout a telle que u_n converge, calculer la limite de u_n.
2. Supposons $a = 1/2$. Soit (v_n) la suite définie de la manière suivante : $v_0 = 1/2$, $v_{n+1} = (1/2)v_n$. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que la suite $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ converge vers une certaine limite $l \in \mathbb{R}$, et que $l \in]1/2, 1]$.

Exercice 4 (UNIQUEMENT VOIE MATHS) :

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \cos(\ln(x))$.

1. Pour tout naturel n, on pose $u_n = e^{-2n.\pi}$ et $v_n = e^{-(2n+1).\pi}$; étudier les limites de suites :
   $$(u_n)_n, (v_n)_n, (f(u_n))_n, (f(v_n))_n.$$
2. Que pouvez-vous dire du comportement de $f(x)$ quand $x \longrightarrow 0^+$?

Exercice 3-bis (UNIQUEMENT VOIE PMM) : Flocon de Von Koch

On considère une suite de figures dans le plan, construite en suivant le procédé suivant par récurrence :

RANG 0 **:** $\mathcal{T}_0$ est l'intérieure (au sens large, en incluant le bord) d'un triangle équilatéral de côté 1. Il a donc un contour formé de $s_0 = 3$ segments, chacun de longueur $L_0 = 1$, avec un périmètre de $p_0 = 3$, et une aire de A_0.

PASSAGE D'UN RANG n **AU RANG** $n+1$ **:** On suppose que $n \in \mathbb{N}$, et que la figure $\mathcal{T}_n$ est construite, délimitée par une ligne polygonale de périmètre p_n, constituée de s_n segments, chacun de longueur L_n, et ayant une aire totale de A_n.

On divise chacun de ces s_n segments en 3 parties égales, et on construit, *vers l'extérieur*, un triangle équilatéral sur le tiers central, ce tiers de segment étant un des côtés du nouveau triangle. La figure $\mathcal{T}_{n+1}$ est la réunion de $\mathcal{T}_n$ et des s_n triangles ainsi construits, et on note s_{n+1}, L_{n+1}, p_{n+1}, A_{n+1}, respectivement le nombre de côtés du contour de $\mathcal{T}_{n+1}$, la longueur de chaque côté, le périmètre et l'aire de $\mathcal{T}_{n+1}$.

FLOCON DE VON KOCH : Le Flocon de Von Koch est la réunion de ces figures, pour toutes les valeurs de n.

1. Quelle est la valeur de A_0 ?
2. Dessiner $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ (on ne demande pas une précision millimétrique, mais on veut comprendre la logique de la construction...)
3. Prouver les relations de récurrence suivantes, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$s_{n+1} = 4.s_n, \qquad L_{n+1} = \frac{1}{3}.L_n, \qquad p_{n+1} = \frac{4}{3}.p_n.$$
4. Donner les valeurs de s_n, L_n, p_n en fonction de n.
5. Montrer que p_n a une limite quand $n \longrightarrow +\infty$. Quelle est le périmètre du Flocon de Von Koch ?
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A_{n+1} = A_n + \dfrac{\sqrt{3}}{12}(\dfrac{4}{9})^n$.
7. Exprimer plus simplement la somme $1 + \dfrac{4}{9} + ... + (\dfrac{4}{9})^{n-1}$ et donner sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$.
8. Donner la valeur de A_n en fonction de n. Quelle est l'aire du Flocon de Von Koch ?