L2 - Année 2005-5006 **vendredi 19 mai 2006**

Licence 1 **Partiel d'analyse**

Durée : 1 heures.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

EXERCICE 1

a) Déterminer la limite des suites suivantes : $u_n = \dfrac{\sin(n^n + \pi)}{n^2+3}$; $v_n = \dfrac{2^{n+2} - 5^n}{2^n + 4 \times 5^n}$.

b) La suite définie par $w_n = (-\pi)^n$ est-elle majorée ? minorée ? A-t-elle une limite ?

c) On pose pour tout entier $n \geq 1$: $r_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

i- Prouver que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

ii- Prouver que : $\forall n \geq 1, r_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

iii- Calculer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

A) Rappeler la définition de la phrase suivante, pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels et un réel λ :

"La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel λ."

B) On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{7n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes vers des réels ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

a) Montrer que $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$ (on pourra considérer les suites $(u_{14n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{14n+7})_{n\in\mathbb{N}}$).

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1, en montrant que la définition de la convergence est satisfaite.

c) Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non convergente telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes ?