EXERCICE 1 : (exponentielles, logarithmes, etc...) **On considère les fonctions suivantes :**

$$a(x) = x^x, b(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}, c(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, d(x) = (1+\frac{1}{x})^x,$$
$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{x^2}}, g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}, u(x) = (1+\frac{1}{\ln^2(x)})^x, v(x) = x^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

(a) Donner les domaines de définition de ces fonctions, montrer qu'elles sont définies sur $]0,1[$**.**
(b) Donner les dérivées de ces fonctions sur $]0,1[$**.**
(c) Donner les limites en 0^+ **et** 1^- **de ces fonctions.**
(d) Pour celles qui sont définies au voisinage de $+\infty$**, donner leur limite en** $+\infty$**.**

EXERCICE 2 : Calculs avec des intégrales

(1) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ **:** $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$**.**

(a) Prouver qu'on a pour tout $n \geq 1$ **:** $I_n = -1 + n.I_{n-1}$ **(faire une intégration par parties). Que vaut** I_0 **?**

(b) Si on pose pour tout $n \geq 0$, $v_n = \dfrac{I_n}{n!}$**, prouver qu'on a** $\forall n \geq 1, v_n = v_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$**.**

(c) Déduire du (b) que $I_n = n!(e - (1 + \dfrac{1}{1!} + ... + \dfrac{1}{n!})) = n!(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!})$**.**

(d) Montrer que, pour tout n**, on a :** $\dfrac{1}{n+1} < I_n < e\dfrac{1}{n+1}$ **et en déduire qu'on a :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) = e$**.**

(2) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ **:** $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^t dt$**.**

(a) Prouver qu'on a pour tout $n \geq 1$ **:** $J_n = e - n.J_{n-1}$**. Que vaut** J_0 **?**

(b) Déduire du (a) que si on pose, pour tout n, $S_n = 1 - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - ... + \dfrac{(-1)^n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$**, on a pour tout** n **:** $J_n = eS_n - 1$**.**

(c) Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e}$**.**

(3) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ **:** $K_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$**.**

(a) Prouver qu'on a pour tout $n \geq 1$ **:** $K_n = \dfrac{2n}{2n+1} K_{n-1}$**. Que vaut** K_0 **?**

(b) Prouver qu'on a, pour tout $n \geq 0$ **:** $K_n = \dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$**.**

(4) On pose pour tout couple d'entiers $n, m \in \mathbb{N}$ **:** $L(n,m) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^m dt$**.**

(a) Prouver qu'on a : $\forall n \geq 0, \forall m > 0, L(n,m) = \dfrac{m}{n+1} L(n+1, m-1)$**.**

(b) Prouver qu'on a : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, L(n,m) = \dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}$**.**

EXERCICE 3 : Une application de la formule de Taylor Lagrange

(1) Prouver que pour tout entier $n \geq 1$**, on peut trouver un réel** c_n **tel que :**

(i) $\dfrac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \dfrac{1}{2c_n^2}$ **;**

(ii) $n < c_n < n+1$**.**

Indication : on appliquera la formule de Taylor Lagrange à la fonction logarithme sur $[n, n+1]$

(2) On pose $S_n = (\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n+1)$**. Prouver en utilisant le (1) qu'on a pour tout** $n \geq 2$ **:** $0 < S_n - S_{n-1} < \dfrac{1}{2n^2}$**.**

(3) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

Indication : on pourra vérifier que $\forall k > 1, \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et utiliser cette inégalité dans une grande addition.

(4) Montrer qu'on peut trouver une suite $(\varepsilon_n)_n$ et un réel γ tels que :

(i) $\forall n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ **;**

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$**.**