Exercice 2

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ par :
$\forall x > 0, f_1(x) = e^x, f_2(x) = 10^x, f_3(x) = e^x \ln x, f_4(x) = \sqrt{x}\ln(x)10^x$.
On note E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions.
On supoose que a, b, c, d sont des réels tels que : $\forall x > 0, a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0$.

(i) Montrer que $e.a + 10.b = 0$ en choisissant une valeur particulière de x.

L'égalité $a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0$ est vérifiée pour tout $x > 0$, donc elle est vraie aussi pour des valeurs choisies de x, par exemple $x = 1$, ce qui donne : $e^1 = e, 10^1 = 10, \sqrt{1} = 1, \ln(1) = 0$, et donc :

$a.e + b.10 + c.0.e + d.1.0.10 = 0 \Rightarrow ea + 10b = 0$.

(ii) Montrer que, $\forall x > 1, \dfrac{a}{(10/e)^x \ln(x)\sqrt{x}} + \dfrac{b}{\sqrt{x}\ln(x)} + \dfrac{c}{\sqrt{x}(10/e)^x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$

On part de l'égalité : $a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0$, vraie pour tout $x > 0$. Si en plus $x > 1$, on peut diviser les deux membres par $\sqrt{x}\ln(x)10^x > 0$ (car $x > 1 \iff \ln(x) > 0$).

On a donc :

$$
\begin{aligned}
& a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0 \\
\Longrightarrow\ & \frac{a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} = \frac{0}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} \\
\Longrightarrow\ & \frac{a.e^x}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} + \frac{b.10^x}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} + \frac{c.\ln(x)e^x}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} + \frac{d.\sqrt{x}\ln(x).10^x}{\sqrt{x}\ln(x)10^x} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \frac{a.}{\sqrt{x}\ln(x)(10/e)^x} + \frac{b.}{\sqrt{x}\ln(x)} + \frac{c}{\ln(x).(10/e)^x} + d = 0, \text{ ce qu'on voulait.}
\end{aligned}
$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x > 1$, la fonction : $x \mapsto (\dfrac{a.}{\sqrt{x}\ln(x)(10/e)^x} + \dfrac{b.}{\sqrt{x}\ln(x)} + \dfrac{c}{\ln(x).(10/e)^x} + d)$, est donc constante, et a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$. Or les trois dénominateurs tendent vers l'infini (car $10/e > 1$), donc l'unicité de la limite donne :

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to+\infty} (\frac{a.}{\sqrt{x}\ln(x)(10/e)^x} + \frac{b.}{\sqrt{x}\ln(x)} + \frac{c}{\ln(x).(10/e)^x} + d) = 0 \\
& \Longrightarrow a.0 + b.0 + c.0 + d = 0 \\
& \Longrightarrow d = 0, \text{ comme annoncé.}
\end{aligned}
$$

(iii) Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{a}{(10/e)^x} + b + c\dfrac{\ln(x)}{(10/e)^x} = 0$. En déduire que $b = 0$.

L'égalité : $a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0$, vraie pour tout $x > 0$, se réduit avec $d = 0$ (prouvé au (ii)), à :

$$
\begin{aligned}
& \forall x > 0, a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x = 0 \\
\Longrightarrow\ & \tfrac{a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x}{10^x} = \tfrac{0}{10^x} \quad \text{(en divisant des deux côtés par } 10^x > 0), \\
\Longrightarrow\ & \tfrac{a.e^x}{10^x} + \tfrac{b.10^x}{10^x} + \tfrac{c.\ln(x)e^x}{10^x} = 0 \\
\Longrightarrow\ & \tfrac{a}{(10/e)^x} + b + c.\tfrac{\ln(x)}{(10/e)^x} = 0,
\end{aligned}
$$

ce qu'on voulait.

Là encore, on peut faire tendre x vers $+\infty$, la limite de l'ensemble étant 0 (car c'est une constante nulle), et $\dfrac{1}{(10/e)^x}, \dfrac{\ln(x)}{(10/e)^x}$ tendant vers 0 car "une exponentielle de base $10/e > 1$ l'emporte sur un logarithme", on obtient :

$$a.0 + b + c.0 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

(iv) Prouver finalement que $a = b = c = d = 0$.

D'après (ii) et (iii), $b = d = 0$. D'après (i), $ea + 10b = 0$, ce qui donne avec $b = 0$: $e.a = 0 \Longrightarrow a = 0$.
Finalement l'égalité :

$$a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0,$$

se réduit à (puisque $a = b = d = 0$) :

$$c.e^x \ln(x) = 0,$$

qui, étant vraie pour tout $x > 0$, entraîne $c = 0$ (car la fonction : $x \longmapsto e^x \ln(x)$, n'est pas nulle).

(v) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre, puis que c'est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

L'égalité $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3 + d.f_4 = 0_E$ entraîne $a = b = c = d = 0$ comme on l'a vu aux questions (i) à (iv). En effet l'hypothèse :

$$\forall x > 0, a.f_1(x) + b.f_2(x) + c.f_3(x) + d.f_4(x) = 0,$$

signifie précisément que $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3 + d.f_4$ est égal à l'élément nul 0_E de E.

C'est précisément la définition d'une famille libre.

Maintenant la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base car elle est libre mais aussi génératrice de E, par définition de E qui est l'espace *engendré* par elle.

Ayant une base de 4 vecteurs, E est dimension 4.

Exercice 4

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ donnée par $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + 2e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathcal{B}$ a trois vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice pour qu'elle soit à la fois l'une et l'autre.

Montrons par exemple qu'elle est libre : supposons que trois réels x, y, z vérifient : $x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 = 0$, montrons qu'on a forcément $x = y = z = 0$.

$x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 = 0$ sécrit :

$x.(e_1 + e_2) + y.(e_2 + 2e_3) + z.(e_1 + e_2 + e_3) = 0 \iff (x + z).e_1 + (x + y + z).e_2 + (2y + z).e_3 = 0.$

Ceci n'est possible que si $x + z = x + y + z = 2y + z = 0$ car (e_1, e_2, e_3) est libre.

On a donc :

$$\begin{array}{ccccccc} (L_1) & x & & & + & z & = & 0 \\ (L_2) & x & + & y & + & z & = & 0 \\ (L_3) & & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (L_1) & x & & & + & z & = & 0 \\ (L_2 - L_1) & & & y & & & = & 0 \\ (L_3) & & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (L_1) & x & & & + & z & = & 0 \\ (L_2) & & & y & & & = & 0 \\ (L_3 - 2L_2) & & & & & z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (L_1 - L_3) & x & & & & & = & 0 \\ (L_2) & & & y & & & = & 0 \\ (L_3 - 2L_2) & & & & & z & = & 0 \end{array}$$

Ainsi $x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 = 0$ n'est possible que si $x = y = z = 0$. Ceci prouve que la $\mathcal{B}$ est libre, donc que c'est une base.

(ii) Donner P, matrice de passage de $\mathcal{B}$, à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.

Par définition P est la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

Les formules :

$v_1 = e_1 + e_2,$ $v_2 = e_2 + 2e_3,$ $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$

donnent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors utiliser la méthode de Gauss pour calculer l'inverse P^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cela confirme donc que P est inversible (et donc que $\mathcal{B}$ est une base), avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Déterminer la matrice B de φ relativement à $\mathcal{B}$.

D'après la formule du cours on a :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 18 & 8 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & -18 & -6 \end{pmatrix}$$ (en tout cas si je n'ai pas fait d'erreur scrogneugneu...).

(iv) Quelle relation y a-t-il entre A et B ?

$B = P^{-1}AP$ comme on l'a déjà dit.

Exercice 5

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ donnée par $v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 + 2e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\mathcal{B}$ a trois vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice pour qu'elle soit à la fois l'une et l'autre.

Montrons par exemple, ce coup-ci, qu'elle est génératrice. Comme $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est elle-même gén{eratrice, il suffit de prouver que v_1, v_2, v_3 engendrent e_1, e_2 et e_3, pour être sûr qu'ils engendrent n'importe quel vecteur.

On part des formules :
$v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 + 2e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
Ces formules étant simples, s'inversent simplement ; par exemple on aura :
$v_3 - v_1 = (e_1 + e_2 + e_3) - (e_1 + e_3) = e_2$.
Une fois qu'on sait cela, on a : $v_2 = e_2 + 2e_3 \Rightarrow e_3 = \frac{1}{2}(v_2 - e_2) = \frac{1}{2}[v_2 - (v_3 - v_1)] = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)$, puis :
$v_1 = e_1 + e_3 \Rightarrow e_1 = v_1 - e_3 = v_1 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3) = \frac{1}{2}[2v_1 - (v_1 + v_2 - v_3)] = \frac{1}{2}(v_1 + v_3 - v_2)$.
Ainsi e_1, e_2, e_3 sont bien engendrés par v_1, v_2, v_3.

(ii) Donner P, matrice de passage de $\mathcal{B}_{\prime}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.

Par définition P est la matrice des composantes des vecteurs de $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
Les formules :
$v_1 = e_1 + e_3,$ $\quad v_2 = e_2 + 2e_3,$ $\quad v_3 = e_1 + e_2 + e_3$
donnent :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, d'après le cours, P^{-1} est non seulement la matrice inverse de P, qu'on peut calculer à l'aide de la méthode de Gauss, mais c'est aussi la matrice de passge de $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ à $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, c'est-à-dire la matrice des composantes de e_1, e_2, e_3 exprimés en fonction de v_1, v_2, v_3. Comme on a trouvé au (i) :

$$e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3 - v_2), e_2 = v_3 - v_1, e_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3),$$

on peut directement écrire :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

On peut bien sûr si on préfère utiliser la méthode de Gauss, ou encore multiplier cette matrice par P pour vérifier qu'on obtient I_3 et qu'on a bien ci-dessus l'inverse de P.

(iii) Déterminer la matrice B de φ relativement à B.

Ce coup-ci, on va calculer directement B : il faut exprimer $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3)$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire en fonction de v_1, v_2, v_3.

On a : $\varphi(v_1) = \varphi(e_1 + e_3)$
$= \varphi(e_1) + \varphi(e_3)$
$= (2e_1 - 2e_2 + e_3) + (-e_1 + e_2)$
$= e_1 - e_2 + e_3$

$= [\frac{1}{2}(v_1 + v_3 - v_2)] - [v_3 - v_1] + [\frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)]$ (d'après les formules du (i)),
$= 2v_1 - v_3$

Puis : $\varphi(v_2) = \varphi(e_2 + 2e_3)$
$= \varphi(e_2) + 2\varphi(e_3)$
$= (2e_1 - 2e_2 + e_3) + 2(-e_1 + e_2)$
$= e_3$
$= \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)$ (d'après les formules du (i)).

Et enfin : $\varphi(v_3) = \varphi(e_1 + e_2 + e_3)$
$= \varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \varphi(e_3)$
$= (2e_1 - 2e_2 + e_3) + (2e_1 - 2e_2 + e_3) + (-e_1 + e_2)$
$= 3e_1 - 3e_2 + 2e_3$
$= 3[\frac{1}{2}(v_1 + v_3 - v_2)] - 3[v_3 - v_1] + 2[\frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)]$ (d'après les formules du (i)).
$= \frac{11}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{5}{2}v_3.$

On peut donc écrire :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Quelle relation y a-t-il entre A et B ?

$$B = P^{-1}AP.$$

(v) Calculer A^2, A^3. Que vaut A^n pour $n \geq 1$ quelconque ?

Le calcul donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0_3}.$$

On en déduit que $A^4 = A.A^3 = A.\mathbf{0_3} = \mathbf{0_3}, A^5 = A.A^4 = A.\mathbf{0_3} = \mathbf{0_3}, ...$, bref, par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \geq 3, A^n = \mathbf{0_3}.$$

(vi) Sans calculs supplémentaires, prouver que : $\forall n \geq 3, B^n = 0$.

On sait que $B = P^{-1}AP$. On en tire :
$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)$
$= (P^{-1}A)(PP^{-1})(AP)$ (par associativité de la multiplication des matrices),
$= (P^{-1}A)\mathbf{I_3}(AP)$ (par définition de l'inverse d'une matrice),
$= (P^{-1}A)(AP)$ (car $\mathbf{I_3}$ est neutre pour la multiplication),
$= P^{-1}(AA)P = P^{-1}A^2P$

On aura de même :
$B^3 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}A)(PP^{-1})A(PP^{-1})(AP) = (P^{-1}A)\mathbf{I_3}A\mathbf{I_3}(AP) = P^{-1}A^3P$, et ainsi de suite :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, B^n = P^{-1}A^nP.$$

Ce raisonnement et le calcul sont valables quels que soient les matrices A, P, B qui vérifient $B = P^{-1}AP$. Dans le cas présent on a en plus :

$$\forall n \geq 3, A^n = \mathbf{0_3}.$$

Donc : $\forall n \geq 3, B^n = P^{-1}A^nP = P^{-1}\mathbf{0_3}P = \mathbf{0_3}$.