Licence 1 **Algèbre - Analyse** **Exercices des révisions**

ALGEBRE

Exercice 1

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x, f_1(x) = \sin(x), f_2(x) = \cos(x), f_3(x) = \sin(3x)$.
On note E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions.
On supoose que a, b, c sont des réels tels que : $\forall x, a.\sin(x) + b.\cos(x) + c.\sin(3x) = 0$.
(i) Montrer que $b = 0$ en choisissant une valeur particulière de x.
(ii) Montrer de même que $a - c = 0$.
(iii) Prouver finalement que $a = b = c = 0$.
(iv) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre, puis que c'est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 2

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ par :
$\forall x > 0, f_1(x) = e^x, f_2(x) = 10^x, f_3(x) = e^x \ln x, f_4(x) = \sqrt{x}\ln(x)10^x$.
On note E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions.
On supoose que a, b, c, d sont des réels tels que : $\forall x > 0, a.e^x + b.10^x + c.\ln(x)e^x + d.\sqrt{x}\ln(x).10^x = 0$.
(i) Montrer que $ea + 10b = 0$ en choisissant une valeur particulière de x.
(ii) Montrer que, $\forall x > 1, \dfrac{a}{(10/e)^x \ln(x)\sqrt{x}} + \dfrac{b}{\sqrt{x}\ln(x)} + \dfrac{c}{\sqrt{x}(10/e)^x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$
(iii) Montrer que $\forall x > 0, \dfrac{a}{(10/e)^x} + b + c\dfrac{\ln(x)}{(10/e)^x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
(iv) Prouver finalement que $a = b = c = d = 0$.
(v) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre, puis que c'est une base de E. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 3

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x, f_1(x) = \sin(x), f_2(x) = \cos(x), f_3(x) = -2\cos(x+1)$.
On note E l'espace vectoriel engendré par ces fonctions.
(i) On supoose que a, b sont des réels tels que : $\forall x, a.f_1(x) + b.f_2(x) = 0$. Montrer que $a = b = 0$, en déduire que la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre.
(ii) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ n'est pas libre.
(iii) Donner une base de E. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 4

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ donnée par $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + 2e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(ii) Donner P, matrice de passage de $\mathcal{B}_{/}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
(iii) Déterminer la matrice B de φ relativement à B.
(iv) Quelle relation y a-t-il entre A et B ?

Exercice 5

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ donnée par $v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 + 2e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(ii) Donner P, matrice de passage de $\mathcal{B}_{/}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
(iii) Déterminer la matrice B de φ relativement à B.
(iv) Quelle relation y a-t-il entre A et B ?
(v) Calculer A^2, A^3. Que vaut A^n pour $n \geq 1$ quelconque ?
(vi) Sans calculs supplémentaires, prouver que : $\forall n \geq 3, B^n = 0$.

ANALYSE

Exercice 1 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.

Exercice 2 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin(x) dx$.

Exercice 3 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x^{10} 10^x dx$.

Exercice 4 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.

Exercice 5 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt[3]{x}} dx$ (poser $u = \sqrt[3]{x}$).

Exercice 9 : Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} dx$.

Exercice 6 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{5 + \cos(x)} dx$ (poser $u = \cos(x)$).

Exercice 8 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + x}{x^4 - 16} dx$.

Exercice 7 : Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx$.

Exercice 10 : Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{2x^2 + x}{x^2 - 1} dx$.

Exercice 11 : Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{e^x (\sin(x) - x)^2}$.

Exercice 12 : Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{(\ln(1 + x) - x) \sin(x) \tan(x)}$.

Exercice 13 :

(a) Enoncer le théorème de Rolle.

(b) L'équation $x^5 + 16x = 10$ peut-elle avoir plusieurs racines ? Montrer qu'elle a exactement une racine réelle.

(c) Mêmes questions avec l'équation $\cos(x) = x^3 + 5x - 7$.

Exercice 14 :

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + 1)$.

(a) Montrer que f est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que la bijection f^{-1}, réciproque de f, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer $f^{-1}(y)$ et $(f^{-1})'(y)$ en fonction de y.

Exercice 15 :

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^{x^2} + x$.

(a) Donner tous les x tels que $f(x) = 0$. Etudier les symétries éventuelles de la fonction f.

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(c) Montrer que f est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que la bijection f^{-1}, réciproque de f, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x) dx$.

Exercice 16 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{2(2x^2 + 1)}{5x}$. On pose $u_0 = 1$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que, si $x > 0$, $\forall x = f(x) \iff x = \sqrt{2}$.

(b) Prouver que, si $x \in [1\sqrt{2}]$, on a : $x \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, et majorée par $\sqrt{2}$.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente vers $\sqrt{2}$.

Exercice 17 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = (3 + \cos(x))x$. On pose $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq x$.

(b) Prouver que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

(c) Que peut-on dire, en général, d'une suite croissante quand $n \to +\infty$? Que dire de la suite u ?