Licence de Mathématiques (L1)
TD n^o 5 (Calcul d'intégrales).

Exercice 1 :

(a)

$$\int_0^7 x^3 - x^2 dx = \int_0^7 x^3 dx - \int_0^7 x^2 dx$$ (par linéarité de l'intégration, règle : $\int_a^b [\alpha.f(x)+\beta.g(x)]dx = \alpha.(\int_a^b f(x)dx)+\beta.(\int_a^b g(x)dx)$),

$$= [\frac{x^4}{4}]_0^7 - [\frac{x^3}{3}]_0^7$$ (parce que la primitive $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est connue et à savoir),

$$= [\frac{7^4}{4} - \frac{0^4}{4}] - [\frac{7^3}{3} - \frac{0^3}{3}] = \frac{2187}{4} - \frac{343}{3} = \frac{5189}{12}.$$

(b) $$\int_{-7}^7 x^3 - x dx = \int_{-7}^7 x^3 dx - \int_{-7}^7 x dx$$ (par linéarité de l'intégration, règle : $\int_a^b [\alpha.f(x)+\beta.g(x)]dx = \alpha.(\int_a^b f(x)dx)+\beta.(\int_a^b g(x)dx)$),

$$= [\frac{x^4}{4}]_{-7}^7 - [\frac{x^2}{2}]_{-7}^7$$ (parce que la primitive $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est connue et à savoir),

$$= [\frac{7^4}{4} - \frac{(-7)^4}{4}] - [\frac{7^2}{2} - \frac{(-7)^2}{2}] = [\frac{2187}{4} - \frac{2187}{4}] - [\frac{49}{2} - \frac{49}{2}] = 0 - 0 = 0.$$

Remarque : la fonction $x \mapsto x^3 - x$ est impaire et l'intervalle $[-7, 7]$ est symétrique par rapport à 0, donc on pouvait dire tout de suite que l'intégrale était nulle. En effet si f est impaire, on aura pour tout $a > 0$:

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_a^{-a} f(-u)(-1)du$ avec le changement de variable $u = -x$ qui donne $dx = -du$ et échange a et $-a$,

$= \int_a^{-a} f(u)du$ car la fonction étant impaire on a : $\forall u, -f(-u) = f(u)$,

$= -\int_{-a}^a f(u)du$ en remettant les bornes dans le bon ordre.

On a donc en changeant la notation des variables muettes x et u par t :

$\int_{-a}^a f(t)dt = -\int_{-a}^a f(t)dt \Rightarrow \int_{-a}^a f(t)dt = 0.$

De toute façon, ce résultat est évident sur un graphique représentant f, en interprétant l'intégrale comme une aire.

(c) $$\int_{-1}^1 2^x dx = \int_{-1}^1 e^{\ln(2)x} dx$$ (car $\forall a > 0, \forall b, a^b = e^{\ln(a)\times b}$),

$$= [\frac{1}{\ln(2)} 2^x]_{-1}^1$$ (car la primitive de $e^{\alpha.x}$ est $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha.x}$),

$$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{\ln(2)} = \frac{3}{2\ln(2)}.$$

(d) $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{x} dx$ n'est pas définie car l'expression intégrée n'est pas définie si $x = 0$, donc n'est pas définie partout sur $[-1, 1]$.

(e) $$\int_0^{-1} \frac{-1}{2^{-x}} dx = -\int_0^{-1} \frac{1}{2^{-x}} dx$$ (par linéarité de l'intégration, règle : $\int_a^b [\alpha.f(x) + \beta.g(x)]dx = \alpha.(\int_a^b f(x)dx) + \beta.(\int_a^b g(x)dx)$),

$$= \int_{-1}^0 2^x dx$$ (en inversant les bornes, règle $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, et en appliquant la règle $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$),

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln(x)dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_1^2 [2\frac{1}{x}\ln(x)]dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}[\ln^2(x)]_1^2$ (car la $2.u'(x).u(x)$ est la dérivée de $u^2(x)$ pour toute fonction u)

$\displaystyle = \frac{1}{2}[\ln^2(2) - \ln^(1)] = \frac{\ln^2(2)}{2}$ (rappel : $\ln(1) = 0$).

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}dx$ n'est pas défini car quand $x < 0$, on a aussi $\frac{1}{x} < 0$ et $\ln(\frac{1}{x})$ n'est pas défini

(rappel : $\ln(t)$ n'est défini que si $t > 0$, avec un résultat prenant n'importe quelle valeur positive ou négative).

(h) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x.\ln(x)}dx = \int_2^4 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx$

$= [\ln(\ln(x))]_2^4$ (car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, et car une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln[u(x)]$, quelle que soit la fonction $u(x) > 0$ - or $\ln(x) > 0$ si $x > 1$),

$\displaystyle = \ln(\ln(4)) - \ln(\ln(2)) = \ln(\frac{\ln(4)}{\ln(2)}) = \ln(\ln(2))$ (grâce aux règles $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, donc $\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2) + \ln(2) = 2\ln(2)$.)

(i) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^\pi = 0 - 0 = 0$ (car sin est une primitive de cos, et $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$).

(j) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(5x)dx = [\frac{1}{5}\sin(5x)]_0^\pi = \frac{0}{5} - \frac{0}{5} = 0$ (rappel : si $F(x)$ est primitive de $f(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}F(\alpha.x)$ est primitive de $f(\alpha.x)$; Ici $\alpha = 5$).

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{5})dx = [5\sin(\frac{x}{5})]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5\sin(\frac{\pi}{10})$ (rappel : si $F(x)$ est primitive de $f(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}F(\alpha.x)$ est primitive de $f(\alpha.x)$; Ici $\alpha = \frac{1}{5}$).

(l) Cas $n \neq 0$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n.x)dx = [\frac{1}{n}\sin(nx)]_0^{2\pi} = \frac{1}{n}[\sin(2n\pi) - \sin(0)] = 0$

Cas $n = 0$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(0.x)dx = \int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$ (rappel : $\int_a^b kdx = k(b-a)$ si $k \in \mathbb{R}$ est une constante).

(m) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n.x)\cos(m.x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]\Big]dx$

(grâce à la formule $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$) ;

Cas $n \neq \pm m$: alors $n - m$ et $n + m$ sont non nuls et on peut écrire :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]\Big]dx = \frac{1}{2}[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x]_0^{2\pi} = 0 \;;$$

Cas $n = m \neq 0$: alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]\Big]dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big[\cos[(2n)x] + \cos[0x]\Big]dx$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2n}\sin(2n)x]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = 0 + \frac{1}{2}[2\pi] = \pi \ ;$$

Cas $n = -m \neq 0$: alors on a $\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x dx = \int_0^{2\pi} \cos(2n)x dx = [\frac{1}{2n}\sin(nx]_0^{2\pi} = 0$ et l'autre est l'intégrale de $\cos(0x) = 1$ donc le tout vaut encore : π.

Cas $n = m = 0$: $\int_0^{2\pi} \cos(n.x)\cos(m.x)dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$.

(n) , (o) : même style de discussion. Cela vaut 0 sauf (o) quand $n = \pm m \neq 0$ auquel cas l'intégrale vaut $\pm\pi$.

Remarque : pour les intégrales trigonométrique, on peut retenir que les intégrales $\int_a^b e^{i\alpha.x}dx = \frac{1}{i\alpha}[e^{i\alpha.b} - e^{i\alpha.a}]$ se calculent comme pour les fonctions $e^{\alpha.x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cela peut simplifier parfois les calculs, et de toute façon la forme complexe permet de retrouver les formules, comme :

$\cos(a)\cos(b) = [\frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia})] \times [\frac{1}{2}(e^{ib} + e^{-ib})]$

$= \frac{1}{4}[e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}]$

$= \frac{1}{4}[e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + e^{-i(a+b)}]$

$= \frac{1}{4}[(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}) + (e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)})] = \frac{1}{4}[2\cos(a+b) + 2\cos(a-b)]$

$= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

(p) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos(x)}dx$: la fonction n'est pas définie sur tout l'intervalle car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(q) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)-3}dx = -\int_1^{2} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)-3}dx$

$= -[\ln(|\cos(x) - 3|)]_0^{\pi}$ (car $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est la dérivée de $\ln[|u(x)|]$ pour toute fonction u qui ne s'annule pas)

$= -[\ln(|-1-3|) - \ln(|1-3|)] = -\ln(4) + \ln(2) = \ln(2)$.

(r) $\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)^3 dx = \frac{-1}{4}\int_0^{\pi} 4(-\sin(x))\cos^3(x)dx$

$= -\frac{1}{4}[\cos^4(x)]_0^{\pi}$ (car $4u'(x)u^3(x)$ est la dérivée de $u^4(x)$ pour toute fonction u),

$= -\frac{1}{4}[(-1)^4 - 1] = 0$.

Exercice 2 :

(a) $\int_1^3 \ln(x)dx = \int_1^3 1 \times \ln(x)dx$ (on peut donc poser $u'(x) = 1, v(x) = \ln(x)$ ce qui permet de choisir $u(x) = x$ et impose $v'(x) = \frac{1}{x}$),

$= [x\ln(x)]_1^3 - \int_1^3 x \times \frac{1}{x}dx$ (car la formule de l'intégration par partie s'écrit $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$),
avec $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$),

$= (3\ln(3) - 1\ln(1)) - \int_1^3 1dx = 3\ln(3) - 0 - (3-1) = 3\ln(3) - 2$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x dx = \int_{-1}^{1} e^x \times x dx$ (on peut donc poser $u'(x) = e^x, v(x) = x$ ce qui permet de choisir $u(x) = e^x$ et impose $v'(x) = 1$),

$\displaystyle = [e^x x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x \times 1 dx$ (car la formule de l'intégration par partie s'écrit $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$),

$= [1e^1 - (-1)e^{-1}] - [e^x]_{-1}^{1}$ (car on peut prendre, comme primitive de l'exponentielle, l'exponentielle elle-même),

$\displaystyle = (e + e^{-1}) - [e - e^{-1}] = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \times x dx$ (on pose $u'(x) = \sin(x), v(x) = x$ ce qui permet de choisir $u(x) = -\cos(x)$ et impose $v'(x) = 1$),

$\displaystyle = [-\cos(x)x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos(x)) \times 1 dx$ (car la formule de l'intégration par partie s'écrit $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$),

$= [-\cos(2\pi) \times (2\pi) - (-\cos(0)) \times 0] + [\sin(x)]_0^{2\pi}$ (car on a $\displaystyle -\int_0^{2\pi} (-\cos(x)) \times 1dx = +\int_0^{2\pi} \cos(x)dx$,
et que $\sin(x)$ est primitive de $\cos(x)$),

$= [-2\pi + 0] + [\sin(2\pi) - \sin(0)] = -2\pi.$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \times x^2 dx$ (on pose $u'(x) = \sin(x), v(x) = x^2$ ce qui permet de choisir $u(x) = -\cos(x)$ et impose $v'(x) = 2x$),

$\displaystyle = [-\cos(x)x^2]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos(x)) \times x dx$

$\displaystyle = [-\cos(2\pi)(2\pi)^2 - (-\cos(0)).0^2] + \int_0^{2\pi} \cos(x) \times x dx$ (on peut refaire une IPP : on pose $u'(x) = \cos(x), v(x) = x$,
ce qui permet de choisir $u(x) = \sin(x)$ et impose $v'(x) = 1$),

$\displaystyle = -4\pi^2 + [\sin(x)x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)dx$

$= -4\pi^2 + [\sin(2\pi).(2\pi) - 0.\sin(0)] - [-\cos(x)]_0^{2\pi}$ (car $-\cos(x)$ est primitive de $\sin(x)$),

$= -4\pi^2 + [0 - 0] - [-1 + 1] = -4\pi^2.$

(e) $\displaystyle I_e = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)e^x dx$ (première IPP : on pose $u'(x) = e^x, v(x) = ax^2 + bx + c, u(x) = e^x, v'(x) = 2ax + b$),

$\displaystyle = [(ax^2 + bx + c)e^x]_0^1 - \int_0^1 (2ax + b)e^x dx$ (deuxième IPP : on pose $u'(x) = e^x, v(x) = 2ax + b, u(x) = e^x, v'(x) = 2a$),

$\displaystyle = [(a + b + c)e - c] - [(2ax + b)e^x]_0^1 + \int_0^1 (2a)e^x dx$ (l c'est terminé, e^x est une primitive de e^x),

$= (a + b + c)e - c - [(2a + b)e - b] + 2a[e^x]_0^1 = [a + b + c - 2a - b + 2a]e + [-c + b - 2a] = (a + c)e - (2a + c - b).$

(f) $\displaystyle I_f = \int_0^{\pi} e^x \sin(x)dx$ (première IPP : on pose $u'(x) = e^x, v(x) = \sin(x), u(x) = e^x, v'(x) = \cos(x)$),

$\displaystyle = [\sin(x)e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(x)e^x dx$ (deuxième IPP : on pose $u'(x) = e^x, v(x) = \cos(x), u(x) = e^x, v'(x) = -\sin(x)$),

$\displaystyle = [0 - 0] - [\cos(x)e^x]_0^{\pi} + \int_0^1 (-\sin(x))e^x dx = -[e^{\pi}(-1) - 1] - \int_0^{\pi} \sin(x)dx = 1 + e^{\pi} - I_f.$

On a l'impression de tourner en rond mais en fait l'égalité obtenue :

$I_f = 1 + e^{\pi} - I_f$

permet de calculer I_f :

$\displaystyle I_f = 1 + e^{\pi} - I_f \Rightarrow 2I_f = 1 + e^{\pi} \Rightarrow I_f = \frac{e^{\pi} + 1}{2}.$

(g) $I_g = \displaystyle\int_1^x t\ln(t)dt$ (IPP : $u'(t) = t, v(t) = \ln(t), u(t) = \frac{1}{2}t^2, v'(t) = \frac{1}{t}$),

$= [\frac{1}{2}t^2\ln(t)]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{1}{2}t^2\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}[x^2\ln(x) - 1\ln(1)] - \frac{1}{2}\int_1^x tdt = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}t^2]_1^x = \frac{1}{4}[2x^2\ln(x) - x^2 + 1].$

(h) Cas $\alpha \neq -1$: $I_{h,\alpha} = \displaystyle\int_1^x t^\alpha \ln(t)dt$ (IPP : $u'(t) = t^\alpha, v(t) = \ln(t), u(t) = \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}, v'(t) = \frac{1}{t}$),

$= [\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\ln(t)]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\frac{1}{t}dt$

$= \frac{1}{\alpha+1}[x^{\alpha+1}\ln(x) - 1\ln(1)] - \frac{1}{\alpha+1}\displaystyle\int_1^x t^\alpha dt$

$= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln(x) - \frac{1}{\alpha+1}[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}]_1^x = \frac{1}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)x^{\alpha+1}\ln(x) - x^{\alpha+1} + 1].$

Cas $\alpha = -1$: $I_h = \displaystyle\int_1^x t^{-1}\ln(t)dt = \frac{1}{2}[\ln^2(t)]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2(x)$ (car $[\ln^2(t)]' = 2[\ln(t)]'\ln(t) = 2\frac{1}{t}\ln(t)$).

(i) $I_i = \displaystyle\int_{-x}^x t^2.2^t dt$ (IPP : $u'(t) = 2^t = e^{\ln(2)t}, v(t) = t^2, u(t) = \frac{1}{\ln(2)}e^{\ln(2)t} = \frac{1}{\ln(2)}2^t, v'(t) = 2t$),

$= [t^2\frac{1}{\ln(2)}2^t]_{-x}^x - \displaystyle\int_{-x}^x (2t).(\frac{1}{\ln(2)}2^t)dt$

$= \frac{1}{\ln(2)}[x^2 2^x - (-x)^2 2^{-x}] - \frac{2}{\ln(2)}\displaystyle\int_{-x}^x t2^t dt$ (IPP : $u'(t) = 2^t, v(t) = t, u(t) = \frac{1}{\ln(2)}2^t, v'(t) = 1$),

$= \frac{x^2}{\ln(2)}[2^x - 2^{-x}] - \frac{2}{\ln(2)}\Big([t\frac{1}{\ln(2)}2^t]_{-x}^x - \displaystyle\int_{-x}^x \frac{1}{\ln(2)}2^t dt\Big)$

$= \frac{x^2}{\ln(2)}[2^x - 2^{-x}] - \frac{2}{\ln(2)}\Big(\frac{1}{\ln(2)}[x.2^x - (-x)2^{-x}] - [(\frac{1}{\ln(2)})^2 2^t]_{-x}^x\Big)$

$= \frac{x^2}{\ln(2)}[2^x - 2^{-x}] - \frac{2x}{\ln^2(2)}[2^x + 2^{-x}] + \frac{4}{\ln^3(2)}[2^x - 2^{-x}].$

(j) $I_j = \displaystyle\int_0^1 Arctan(x)dx$ (IPP : $u'(x) = 1, v(x) = Arctan(x), u(x) = x, v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, cette dernière étant à connaître),

$= [xArctan(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 x \times \frac{1}{x^2+1}dx$

$= [Arctan(1) - Arctan(0)] - [\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^1$ (car $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$ pour la fonction positive : $u(x) = x^2+1$),

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$

Remarque : il est bon de se souvenir des valeurs souvent rencontrées :

$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$; $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$;

qui donnent par exemple : $Arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}, Arctan(1) = \frac{\pi}{4}, Arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (et des choses similaires pour $Arcsin$, $Arccos$;

en dehors de ces valeurs, et des habituels $Arctan(0) = 0, \sin(\pi) = 0, ...$,

il vaut mieux ne pas essayer de simplifier les expressions trigonométriques trouvées.

(k) $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$ (IPP : $u'(t) = t^n, v(t) = (1-t)^n, u(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}, v'(t) = n(-1)(1-t)^{n-1}$),

$= [\frac{1}{n+1}t^{n+1}(1-t)^n]_0^1 - \int_0^1 (\frac{1}{n+1}t^{n+1})(-n(1-t)^{n-1})dt$ (Dans le crochet on remarque que $t^{n+1} = 0$ quand $t = 0$, et $(1-t)^{n-1} = 0$ quand $t = 1$, donc le crochet vaut $0 - 0 = 0$),

$= \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}dt$ (deuxième IPP : $u'(t) = t^{n+1}, v(t) = (1-t)^{n-1}, u(t) = \frac{1}{n+2}t^{n+2}, v'(t) = (n-1)(-1)(1-t)^{n-2}$),

$= \frac{n}{n+1}[\frac{1}{n+2}t^{n+2}(1-t)^{n-1}]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 (\frac{1}{n+2}t^{n+2})(-(n-1)(1-t)^{n-2})dt$ (Dans le crochet on remarque que $t^{n+2} = 0$ quand $t = 0$, et $(1-t)^{n-2} = 0$ quand $t = 1$, donc il vaut encore 0),

$= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}dt$ (troisième IPP : etc. etc),

$\dots \qquad \ddots$

$= \frac{n(n-1)...1}{(n+1)(n+2)...(n+n)}\int_0^1 t^{n+n}(1-t)^{n-n}dt$ (au bout de la n-ème IPP),

$= n!\frac{1}{(n+1)(n+2)...(2n)}\int_0^1 t^{2n}dt$ (car $(1-t)^0 = 1$),

$= n!\frac{(1.2...n)\times 1}{(1.2...n)\times(n+1)(n+2)...(2n)}[\frac{1}{2n+1}t^{2n}]_0^1 = n!\frac{n!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes, en utilisant éventuellement une ou plusieurs des intégrations par parties :
(a) $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int -\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}dx = -\ln[|\cos(x)|] + C^{\text{te}}$, calcul valable (sans IPP) sur tout intervalle où le cosinus ne s'annule pas (ou : où la tangente est bien définie) ;

(b) $\int x.Arctan(x)dx = \frac{x^2}{2}Arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x^2+1}dx$ (car la formule de l'intégration par partie pour les intégrales indéfinies s'écrit : $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx + C^{\text{te}}$, ; et qu'on a pris ici : $u'(x) = x, v(x) = Arctan(x)$, avec : $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + C^{\text{te}}, v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$),

$= \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}\int (\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1})dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}(\int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx) = \frac{1}{2}x^2 Arctan(x) - \frac{1}{2}(x - Arctan(x)) = \frac{1}{2}[x^2 Arctan(x) + Arctan(x) - x]$, à une constante près.

(c) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2) - \int x\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$ (car la formule de l'intégration par partie pour les intégrales indéfinies s'écrit : $\displaystyle\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx + C^{\text{te}}$, ;
et qu'on a pris ici :
$u'(x) = 1, v(x) = \ln(1+x^2)$, avec : $u(x) = x, v'(x) = [\ln(x^2+1)]' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$),

$$= x\ln(1+x^2) - \int x\frac{2x}{1+x^2}dx$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = ... = x\ln(x^2+1) - 2(x - Arctan(x))$$

(même fin qu'au (b)).

(d) $\displaystyle\int x^3e^xdx = x^3e^x - \int (3x^2)e^xdx$ (première IPP avec $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = x^3$ qui donne $v'(x) = 3x^2$),

$= x^3e^x - 3\displaystyle\int x^2e^xdx$

$= x^3e^x - 3[x^2e^x - \displaystyle\int (2x)e^xdx]$ (deuxième IPP avec $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = x^2$ qui donne $v'(x) = 2x$),

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\displaystyle\int xe^xdx$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6[xe^x - \displaystyle\int 1\times e^xdx]$ (deuxième IPP avec $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = x$ qui donne $v'(x) = 1$),

$= x^3e^3 - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x$.

(e) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int(-x^2)'e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ sans IPP

(seulement avec la formule de dérivée d'une composée qui affirme que : $[e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$, pour toute fonction u).

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes, en utilisant le changement de variable de votre choix...

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \int_1^3 2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$

$= 2\displaystyle\int_1^3 u'(x)e^{ux}dx$ (car si on pose $u(x) = \sqrt{x}$, on a bien $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$),

$= 2\displaystyle\int_{u(1)}^{u(3)} e^udu$ (la formule du changement de variable étant : $\displaystyle\int_a^b u'(x)f[u(x)]dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$,
rendue encore plus claire en notant "$\displaystyle= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$",
même si en toute rigueur on ne devrait pas noter par la même lettre "u"
à la fois la fonction : $x \mapsto u(x)$, et une variable muette),

$= 2\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} e^udu = 2[e^u]_1^{\sqrt{3}} = 2(e^{\sqrt{3}} - e)$.

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_1^3 x^{-\frac{1}{3}}\ln(x)dx$

$= \displaystyle\int_1^3 3\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\ln(x)dx$

$= 3\displaystyle\int_1^3 [\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}]x^{\frac{1}{3}}\ln(x)dx$

$= 3\displaystyle\int_1^3 [u'(x)]u(x)\ln[u(x)^3]dx$ (car si on pose $u(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, on a bien $u'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, et $x = u(x)^3$),

$$= 3\int_{u(1)}^{u(3)} u\ln(u^3)du \qquad \text{(la formule du changement de variable étant : } \int_a^b u'(x)f[u(x)]dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du\text{),}$$
$$= 3\int_1^{\sqrt[3]{3}} u[3\ln(u)]du \qquad \text{(car on a : } \forall a>0, \forall b, \ln(a^b) = b\ln(a)\text{),}$$
$$= 9\int_1^{\sqrt[3]{3}} u\ln(u)du$$
$$= 9\big([\frac{u^2}{2}\ln(u)]_1^{\sqrt[3]{3}} - \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{u^2}{2}\frac{1}{u}du\big) \qquad \text{(par une IPP),}$$
$$= 9\big([\frac{\sqrt[3]{3}^2}{2}\ln(\sqrt[3]{3}) - 0] - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt[3]{3}} udu\big)$$
$$= 9\big(\frac{\sqrt[3]{9}\frac{1}{3}\ln(3)}{2} - \frac{1}{2}[\frac{u^2}{2}]_1^{\sqrt[3]{3}}\big) \qquad \text{(en utilisant } \ln(\sqrt[3]{(a)}) = \ln(a^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\ln(a)\text{),}$$
$$= \frac{3\sqrt[3]{9}\ln(3)}{2} - \frac{9}{4}(\sqrt[3]{9} - 1).$$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{2+\sin(x)}dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\frac{u(x)}{2+u(x)}dx$ (en posant $u(x) = \sin(x)$ qui donne $u'(x) = \cos(x)$),
$$= \int_{\sin(\frac{-\pi}{2})}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{u}{2+u}du \qquad \text{(la formule du changement de variable étant : } \int_a^b u'(x)f[u(x)]dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du\text{),}$$
$$= \int_{-1}^1 \frac{u}{2+u}du = \int_{-1}^1 \frac{(u+2)-2}{u+2}du = \int_{-1}^1 1du - \int_{-1}^1 \frac{2}{u+2}du = 2 - 2\ln(3).$$

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^2 u'(x)\frac{1}{u(x)+2}dx$ (grâce au choix $u(x) = u'(x) = e^x$),
$$= \int_{e^0}^{e^2} \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_1^{e^2} = \ln(e^2+1) - \ln(2) = \ln(\frac{e^2+1}{2}).$$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x}{x^2}dx$: erreur, c'est inextricable !!!!!!

(f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2^x}{4^x+1}dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^2 (\ln(2)2^x)\frac{1}{4^x+1}dx$ (si $u(x) = 2^x$, on a $u'(x) = \ln(2)2^x$ et $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = u(x)^2$),
$$= \frac{1}{\ln(2)}\int_{2^0}^{2^2} \frac{du}{u^2+1} \qquad \text{(grâce au changement de variable } u = u(x) = 2^x\text{),}$$
$$= \frac{1}{\ln(2)}\int_1^4 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\ln(2)}[Arctan(4) - Arctan(1)] = \frac{1}{\ln(2)}[Arctan(4) - \frac{\pi}{4}].$$

Exercice 5 :

(a) $\displaystyle F_a(x) = \int x^2\tan(x^3)dx$
$$= \int \frac{1}{3}\tan(u(x))u'(x)dx \qquad \text{(en posant } u(x) = x^3, \text{"}du\text{"} = u'(x)dx = 3x^2dx\text{),}$$
$$= \int \tan(u)du$$
$$= \int \frac{\sin(u)}{\cos(u)}du$$
$$= \int -\frac{\cos'(u)}{\cos(u)}du$$
$$= -\ln[|\cos(u)|]$$
$$= -\ln[|\cos(x^3)|], \text{ à une constante près} \qquad \text{(puisqu'on avait } u = x^3\text{).}$$

(b) $F_b(x) = \int \frac{\sin(2x) + 2\cos(x)}{\sin(x) + 3} dx$

$= \int \frac{2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)}{\sin(x) + 3} dx$ (puisqu'on a $\forall x, \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$),

$= \int 2\frac{\sin(x) + 2}{\sin(x) + 3}[\cos(x)dx]$

$= \int 2\frac{u-1}{u} du$ (en posant $u = \sin(x) + 3$, ce qui donne $du = \cos(x)dx$),

$= \int 2(1 - \frac{1}{u})du$

$= 2u - 2\ln(u)$

$= 2(\sin(x) + 3) - 2\ln(\sin(x) + 3)$ (puisque $u = \sin(x) + 3$),

$= 2\sin(x) - 2\ln(\sin(x) + 3) + C^{\text{te}}$.

(c) $F_c(x) = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

$= \int e^u u^3 (\frac{-du}{u^2})$ (car si on pose $u = 1/x$, on aura $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = e^{\frac{1}{x}} \times (\frac{1}{x})^3 = e^u.u^{\cdot}$ et par ailleurs $x = 1/u \Rightarrow dx = \frac{-du}{u^2}$),

$= -\int ue^u du$ (en simplifiant),

$= -[ue^u - \int e^u]$ (en effectuant une intégration par partie, en considérant que e^u est la dérivée de e^u),

$= -ue^u + e^u$ (à une constante près),

$= -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}$ (car on avait $u = 1/x$),

$= (1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} + C^{\text{te}}$.

(d) $\int \ln(\cos(x) + 1)\sin^3(x)dx = \int \ln(\cos(x) + 1)\sin^2(x)\sin(x)dx$

$= \int \ln(\cos(x) + 1)(1 - \cos^2(x))\sin(x)dx$

$= \int \ln(u)(1 - (u-1)^2)(-du)$ (car si on pose $u = \cos(x) + 1$, on a $du = -\sin(x)dx$),

$= \int \ln(u)(u^2 - 2u)du$

$= [\ln(u)(\frac{u^3}{3} - u^2)] - \int \frac{1}{u}(\frac{u^3}{3} - u^2)du$ (en faisant une IPP, $u^2 - 2u$ étant la dérivée de $\frac{u^3}{3} - u^2$),

$= \ln(u)\frac{u^3}{3} - u^2\ln(u) - \int (\frac{u^2}{3} - u)du$

$= \ln(u)\frac{u^3}{3} - u^2\ln(u) - \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{2}$

$= \ln(\cos(x) + 1)\frac{(\cos(x) + 1)^3}{3} - (\cos(x) + 1)^2\ln(\cos(x) + 1) - \frac{(\cos(x) + 1)^3}{9} - \frac{(\cos(x) + 1)^2}{2}$, à une constante près.

(e) $F_e(x) = \int x\sqrt{1 + x^2}dx$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$ (en posant $u = x^2 + 1$ qui donne $du = 2xdx$),

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1}u^{\frac{1}{2}+1}\big) = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C^{\text{te}}$.

(f) $\int 3^x\sqrt{1 + 9^x}dx = \frac{1}{\ln(3)}\int \sqrt{1 + t^2}dt$ (en posant $t = 3^x$ d'où $\ln(3)3^x dx = dt$ et $9^x = (3^x)^2 = t^2$).

Il s'agit maintenant de calculer $F(t) = \displaystyle\int 1 + t^2 dt$.

Si on connaît bien les fonctions hyperboliques on peut poser $t = sh(u)$, ce qui revient à $u = Argsh(t)$, sh et $Argsh$ étant des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
On remarque alors que : $\sqrt{1 + sh^2(u)} = \sqrt{ch^2(u)} = ch(u)$ (≥ 0), et $dt = ch(u)du$. Finalement :
$F(t) = \displaystyle\int 1 + t^2 dt = \int ch(u)[ch(u)du] = \int ch^2(u)du = \int \frac{ch(2u) + 1}{2} du = \frac{1}{4} sh(2u) + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(sh(u)ch(u) + u)$,
Donc :
$F(t) = \dfrac{1}{2}(sh(Argsh(t))ch(Argsh(t)) + Argsh(t)) = \dfrac{1}{2}(t\sqrt{1 + t^2} + Argsh(t))$ et :
$\displaystyle\int 3^x \sqrt{1 + 9^x} dx = \frac{1}{2\ln(3)} \left(3^x \sqrt{1 + 9^x} + Argsh(3^x)\right)$.
(On a utilisé l'identité $ch^2(u) - sh^2(u) = 1 \Rightarrow ch(u) = \sqrt{1 + sh^2(u)}$, et par ailleurs le fait que $sh(Argsh(t)) = t$, qui est la définition de la fonction réciproque).

Si on ne connaît pas bien ces fonctions, on peut utiliser une idée dérivée qui est la transformation de $t^2 + 1$ en un carré quand t est du type $sh(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2} = \dfrac{X - 1/X}{2}$ avec $X = e^u$.
Posons donc $t = X - 1/X$. Notons que cette fonction est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est $1 + 1/X^2 > 0$) donc on a un changement de variable bijectif et pour lequel $X > 0$.
Par ailleurs $dt = (1 + 1/X^2)dX$ et $t^2 + 1 = \dfrac{(X - 1/X)^2}{4} + 1 = \dfrac{X^2 + 1/X^2 - 2 + 4}{4} = \dfrac{X^2 + (1/X)^2 + 2}{4} = (\dfrac{X + 1/X}{2})^2$, avec $X + 1/X > 0$ pour $X > 0$. Finalement on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + t^2} dt &= \int \sqrt{(\frac{X + 1/X}{2})^2} [(1 - 1/X^2)dX] \\
&= \int \frac{X + 1/X}{2} (1 + 1/X^2) dX \\
&= \int \frac{X + 2/X + 1/X^3}{2} dX \\
&= \frac{X^2 - 1/X^2}{4} + \ln(X)
\end{aligned}$$

Reste à recalculer X en fonction de t : comme $t = X - 1/X$ on a $X^2 - tX - 1 = 0$ donc $X = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$. Comme $X > 0$, on a donc $X = \dfrac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}$, et :

$$\int \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{(\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2})^2 - (\frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2})^{-2}}{4} + \ln(\frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}).$$

(g) $\displaystyle\int \cos(x)\sqrt{1 + \sin^2(x)} dx = \int \sqrt{1 + u^2} du$ si on pose $u = \sin(x)$, ce qui ramène au calcul déjà effectué au (f).

Exercice 6 : Décomposer en éléments simples les fractions suivantes, puis calculer une primitive (en précisant un intervalle où ce calcul est valable) :

(a) $F(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Cette fonction est définie si $x \neq \pm 1$. Par ailleurs le dénominateur se décompose en : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.
D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on peut trouver deux réels a, b uniques, tels que :
$(*) \forall x \neq \pm 1, \ \dfrac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{b}{x + 1}$.
Multiplions les deux membres de $(*)$ par $(x - 1)$, on obtient : $\forall x, \ \dfrac{(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = a\dfrac{x - 1}{x - 1} + (x - 1)\dfrac{b}{x + 1}$
$\iff \forall x \neq \pm 1, \ \dfrac{1}{x + 1} = a + (x - 1)\dfrac{b}{x + 1}$.
Cette nouvelle égalité a un sens si $x = 1$, et comme elle est vraie pour tout $x \neq \pm 1$, on peut faire tendre x vers 1, ou bien se référer à la théorie des polynômes, pour affirmer que l'égalité est encore vérifiée pour $x = 1$. Cela donne :
$\dfrac{1}{1 + 1} = a + 0\dfrac{b}{1 + 1} \iff \dfrac{1}{2} = a$.

On utilise la même méthode pour b : on multiplie par $(x+1)$, ce qui donne $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{a}{x-1}(x+1)+b$, d'où avec $x=-1$: $-\dfrac{1}{2} = b$.

Finalement : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1/2}{x-1} - \dfrac{1/2}{x+1}$.

On peut alors calculer la primitive : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx = (1/2)\int \frac{1}{x-1}dx - (1/2)\int \frac{1}{x+1}dx = (1/2)\ln(|x-1|) - (1/2)\ln(|x+1|)$.

Ce calcul (et son résultat) sont valables sur tout *intervalle* où la fonction est définie, donc sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

(b) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. On applique le théorème de décomposition en éléments simples : il existe a,b,c uniques tels que : $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3}$.

On mutliplie par $(x-1)$, ce qui donne : $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)} = a + (x-1)(\dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3})$, et on peut alors faire $x=1$, ce qui donne :

$a + 0 = \dfrac{1}{(1-2)(1-3)} = \dfrac{1}{2}$.

De même en multipliant par $(x-2)$ (on trouve $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = [\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{c}{x-3}](x-2)+b)$ puis en faisant $x=2$:

$b + 0 = \dfrac{1}{(2-1)(2-3)} = -1$.

Enfin, en faisant de même avec $x-3$ et c :

$c = \dfrac{1}{(3-1)(3-2)} = \dfrac{1}{2}$.

On a finalement : $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{1/2}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1/2}{x-3}$, d'où :

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = (1/2)[\ln(|x-1|) + \ln(|x-3|)] - \ln[|x-2|] + C^{\text{te}}$.

Ce calcul est valable sur les intervalles où il n'y a pas de problème de définition : $]-\infty,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$, $]3,+\infty[$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$. On commence par décomposer cette fraction en éléments simples :

$\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ uniques.

Multiplions par $(x-1)^2$:

$\dfrac{x^2}{x^2+1} = (x-1)a + b + (x-1)^2\dfrac{cx+d}{x^2+1}$

Et faisons alors $x=1$, on obtient :

$\dfrac{1}{1^2+1} = 0.a + b + 0^2(...) \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

On aura alors :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{1/2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-(1/2)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(1/2)(x^2-1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(1/2)(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{(1/2)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

On en tire en multipliant à nouveau par $(x-1)$:

$a + (x-1)\dfrac{cx+d}{x^2+1} = \dfrac{(1/2)(x+1)}{(x^2+1)}$.

Ce qui donne en faisant $x=1$:

$a + 0 = \dfrac{(1/2)(1+1)}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(1/2)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)} \Rightarrow \frac{cx+d}{x^2+1} &= \frac{(1/2)(x+1)}{(x-1)(x^2+1)} - \frac{1/2}{x-1}\\ &= \frac{(1/2)(x+1)-(1/2)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)}\\ &= \frac{(1/2)(x-x^2)}{(x-1)(x^2+1)}\\ &= \frac{-(1/2)x(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{-(1/2)x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Finalement : $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{1/2}{x-1} + \dfrac{1/2}{(x-1)^2} + \dfrac{-(1/2)x}{x^2+1}$, d'où :

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int [\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{-(1/2)x}{x^2+1}]dx$$
$$= (1/2)\int \frac{1}{x-1}dx + (1/2)\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - (1/2)\int \frac{x}{x^2+1}dx$$
$$= (1/2)\ln[|x-1|] - \frac{1/2}{x-1} - (1/4)\ln(x^2+1).$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc x^4+1 se décompose comme produit de deux polynômes de degré 2 (avec $\Delta < 0$). On peut le décomposer dans $\mathbb{C}$ pour trouver sa décomposition dans $\mathbb{R}$:

l'équation $x^4+1=0 \iff x^4 = -1 = e^{i\pi}$ étant facile à résoudre dans $\mathbb{C}$; on trouve les 4 racines $Z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), Zi, -Z = \overline{iZ}, -iZ = \overline{Z}$, ce qui donne en regroupant les termes :

$x^4+1 = (x-Z)(x-iZ)(x+Z)(x+iZ) = [(x-Z)(x-\overline{Z})][(x-iZ)(x-\overline{iZ})] = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$

On pouvait aussi être astucieux :
$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2$ (car x^4+1 est le début de $(x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$),
$= (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$ (directement par $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$).

On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} = \frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Ici les nombres complexes jouent le même rôle que les racines réelles pour les éléments simples de première espèce. Par exemple, comme $Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ est racine de $x^2 - x\sqrt{2}+1$, on peut multiplier par $(x^2-x\sqrt{2}+1)$ l'égalité :

$$\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} = ax+b+(x^2-x\sqrt{2}+1)\frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

ce qui donnera avec $x = Z$:

$$aZ+b = \frac{1}{Z^2+Z\sqrt{2}+1} \iff a\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)+b = \frac{1}{i+(1+i)+1} \iff (\frac{a}{\sqrt{2}}+b) + a\frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{2(1+i)} = \frac{1}{4}(1-i)$$

Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe étant uniques, on obtient :

$a\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

et $a\frac{1}{\sqrt{2}} + b = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$

Le même calcul pour l'autre terme donne c et d. On peut aussi remarquer que $f(-x) = f(x)$ et que dans $f(-x)$, les termes en $x^2 \pm x\sqrt{2}+1$ sont échangés. De toute façon on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

On aura donc : $\displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx.$

Ces primitives sont assez faciles à calculer, malgré des changements des coefficients un peu compliqués.

Prenons par exemple $A(x) = \displaystyle\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$. La dérivée de $x^2+x\sqrt{2}+1$ étant $2x+\sqrt{2}$ on a intérêt à isoler un tel terme et à écrire :

$$A(x) = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2}) - \frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$

Pour calculer la deuxième intégrale on met le trinôme sous forme canonique :

$$x^2+x\sqrt{2}+1 = x^2+2x\frac{\sqrt{2}}{2} + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1 = (x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\big(2(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1\big) = \frac{1}{2}\big((x\sqrt{2}+1)^2+1\big).$$

On aura donc :

$$\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}\big((x\sqrt{2}+1)^2+1\big)}dx$$

$$= 2\int \frac{1}{(x\sqrt{2}+1)^2+1}dx$$
$$= 2\int \frac{1}{u^2+1}\frac{du}{\sqrt{2}} \qquad \text{(en posant } u = x\sqrt{2}+1 \text{ qui donne } x = \frac{u-1}{\sqrt{2}} \text{ et } dx = \tfrac{du}{\sqrt{2}}\text{),}$$
$$= \sqrt{2}\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$= \sqrt{2}Arctan(u) = \sqrt{2}Arctan(x\sqrt{2}+1).$$

Finalement :

$$A(x) = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}Arctan(x\sqrt{2}+1)\ .$$

La deuxième primitive ne demande pas un nouveau calcul puisqu'elle s'écrit :

$$B(x) = \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$
$$= \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}(-u)+\frac{1}{2}}{(-u)^2-(-u)\sqrt{2}+1}(-du) \qquad \text{(en posant } u = -x \text{ qui donne } dx = -du\text{),}$$
$$= -\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u+\frac{1}{2}}{u^2+u\sqrt{2}+1}du$$
$$= -A(u) = -\Big(-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(u^2+u\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}Arctan(u\sqrt{2}+1)\Big)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}Arctan(x\sqrt{2}-1) \qquad \text{(en tenant compte de } Arctan(-t) = -Arctan(t)\text{).}$$

On obtient comme résultat final :

$$\int f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) + 2Arctan(x\sqrt{2}+1) + \ln(x^2-x\sqrt{2}+1) + 2Arctan(x\sqrt{2}-1)\Big] + C^{\text{te}}.$$

(e) $g(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$; le dénominateur se décompose facilement en : $(x^4-1) = ((x^2)^2-1) = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.
Il y a donc 4 réels a, b, c, d uniques tels que :

$g(x) = \dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$. Cette égalité est valable pour $x \neq \pm 1$ dans $\mathbb{R}$.

Si on multiplie les deux membres par $(x-1)$ on obtient :

$$(x-1)\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = a + (x-1)[\frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}]$$

Donc :

$$a + (x-1)[\frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}] = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

Cette égalité est vraie si $x \neq 1$, mais elle reste vraie, par continuité, en $x = 1$, ce qui donne :

$$a + (0)[...] = \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4}.$$

De même en multipliant par $(x+1)$ on obtient :

$$b + (x+1)[\frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}] = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

Cette égalité est vraie si $x \neq -1$, mais elle reste vraie, par continuité, en $x = -1$, ce qui donne :

$$b + (0)[...] = \frac{1}{(-1-1)(1^2+1)} = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{(1/4)}{x-1} + \frac{-(1/4)}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} \Rightarrow \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} - \frac{(1/4)}{x-1} - \frac{-(1/4)}{x+1}$$
$$= \frac{1-(1/4)(x+1)(x^2+1)+(1/4)(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{1-(1/4)(x^3+x^2+x+1)+(1/4)(x^3-x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{-(1/2)x^2+(1/2)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{-(1/2)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{-(1/2)}{x^2+1}$$

On a donc $c = 0, d = -(1/2)$ et finalement :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{(1/4)}{x-1} + \frac{-(1/4)}{x+1} + \frac{-(1/2)}{x^2+1}.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\ &= (1/4)\int \frac{1}{x-1}dx - (1/4)\int \frac{1}{x+1}dx - (1/2)\int \frac{1}{x^2+1}dx\\ &= (1/4)\ln[|x-1|] - (1/4)\ln[|x+1|] - (1/2)Arctan(x) + C^{\text{te}}.\end{aligned}$$

(f) $F(x) = \int \frac{x^3}{x^2+6x+5}$; ici la fraction intégrée a un numérateur de degré supérieur à celui du dénominateur, ce qui signifie qu'il faut commencer par faire la division euclidienne de x^3 par x^2+6x+5 :

$$\begin{array}{cccc|c} x^3 & & & & \underline{x^2+6x+5} \\ x^3 & +6x^2 & +5x & & x-6 \\ & -6x^2 & -5x & & \\ & -6x^2 & -36x & -30 & \\ & & 31x & +30 & \end{array}$$

On a donc : $x^3 = (x-6)(x^2+6x+5) + 31x + 30$, ce qui donne, en divisant par x^2+6x+5 :
$\frac{x^3}{x^2+6x+5} = x - 6 + \frac{31x+30}{x^2+6x+30}$.

C'est ce dernier quotient qu'on peut décomposer en éléments simples, et compte tenu de la factorisation : $x^2+6x+5 = (x+5)(x+1)$, on obtient une décomposition de la forme :
$\frac{31x+30}{x^2+6x+5} = \frac{31x+30}{(x+1)(x+5)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+5}$.

Les méthodes habituelles (multiplier par $(x+1)$ puis faire $x=-1$, et idem pour 5) donnent :

$$a = -\frac{1}{4}, b = \frac{125}{4}.$$

Finalement :

$$\frac{x^3}{x^2+6x+5} = x - 6 + \frac{-(1/4)}{x+1} + \frac{(125/4)}{x+5}$$

D'où :

$$\int \frac{x^3}{x^2+6x+5}dx = \int (x-6)dx - (1/4)\int \frac{1}{x+1}dx + (125/4)\int \frac{1}{x+5}dx = \frac{x^2}{2} - 6x - (1/4)\ln(x+1) + (125/4)\ln(x+5) + C^{\text{te}}.$$

(g) Primitive de $\frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4}$;

Ici encore le dénominateur n'est pas de degré supérieur strictement au numérateur, donc on commence par une division euclidienne, qui est très simple : $x^3+3x+4 = (x^3+3x-4)\times 1 + 8$.

On a donc : $\frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4} = \frac{(x^3+3x-4)\times 1 + 8}{x^3+3x-4} = 1 + \frac{8}{x^3+3x-4}$.

Il faut donc décomposer cette dernière fonction, en commençant par factoriser x^3+3x-4 sur $\mathbb{R}[x]$. Comme $1^3+3.1-4=0$, on peut mettre $x-1$ en facteur :

$x^3+3x-4 = (x-1)(x^2+x+4)$, décomposition qu'on ne peut pousser plus loin car $\Delta = (1)^2 - 4.4 = -15 < 0$.

On doit donc trouver a, b, c tels que :
$\frac{8}{x^3+3x-4} = \frac{8}{(x-1)(x^2+x+4)} = \frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+x+4}$.

La méthode habituelle donne : $a = \frac{8}{1^2+1+4} = \frac{4}{3}$ d'où :

$$\begin{aligned}\frac{cx+d}{x^2+x+4} &= \frac{8}{(x-1)(x^2+x+4)} - \frac{4/3}{x-1}\\ &= \frac{8-(4/3)(x^2+x+4)}{(x-1)(x^2+x+4)}\\ &= -(4/3)\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+4)}\\ &= -(4/3)\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x+4}\\ &= -(4/3)\frac{x+2}{x^2+x+4}.\end{aligned}$$

Si on récapitule : $\frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4} = 1 + \frac{8}{x^3+3x-4} = 1 + \frac{(4/3)}{x-1} - (4/3)\frac{x+2}{x^2+x+4}$.

D'où : $\displaystyle\int \frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4}dx = \int 1dx + \int \frac{(4/3)}{x-1}dx - \int (4/3)\frac{x+2}{x^2+x+4}dx = x + (4/3)\ln[|x-1|] - (4/3)\int \frac{x+2}{x^2+x+4}dx.$

Dans cette dernière intégrale, on peut écrire $x+2 = \dfrac{1}{2}(2x+1)+\dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{x+2}{x^2+x+4} = (1/2)\dfrac{2x+1}{x^2+x+4} + (3/2)\dfrac{1}{x^2+x+4}$.

Ce qui permet de se ramener à un morceau de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \ln[|u(x)|]$ et un autre de la forme $\dfrac{\text{constante}}{x^2+x+4}$ qui se ramène à un arc tangente.

En effet : $x^2+x+4 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{15}{4} = \dfrac{15}{4}\left[(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{15}{4}}})^2+1\right] = \dfrac{15}{4}\left[(\dfrac{2x+1}{\sqrt{15}})^2+1\right]$.

On a donc : $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x+4}dx = (1/2)\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + (3/2)\int \frac{1}{(15/4)\left[(\frac{2x+1}{\sqrt{15}})^2+1\right]}dx$

$$= (1/2)\int \frac{(x^2+x+4)'}{x^2+x+4}dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{15}}{2}du = (1/2)\ln(x^2+x+4) + \frac{\sqrt{15}}{5}Arctan(u),$$

et enfin :

$$\int \frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4}dx = x + (4/3)\ln[|x-1|] - (2/3)\ln(x^2+x+4) - \frac{4\sqrt{15}}{15}Arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}) + C^{\text{te}}.$$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^6-2x^4+3x^2-6}dx = ?.$

Il faut commencer par décomposer en facteurs irréductibles le dénominateur :

$$\begin{aligned} x^6-2x^4+3x^2-6 &= u^3-2u^2+3u-6 && \text{(en posant } u=x^2\text{)},\\ &= (u-2)(u^2+3) && \text{(car } u=2 \text{ est solution évidente)},\\ &= (x^2-2)((x^2)^2+3)\\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^4+3)\\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(en utilisant l'astuce $x^4+3 = (x^2)^2+\sqrt{3}^2+2x^2\sqrt{3}-2x^2\sqrt{3} = (x^2+\sqrt{3})^2-(x\sqrt{2\sqrt{3}})^2$).

On peut utiliser les calculs intermédiaires pour a décomposition en éléments simples :

$\dfrac{1}{(u-2)(u^2+3)} = \dfrac{A}{u-2}+\dfrac{Bu+C}{u^2+3}$, donc, avec les techniques habituelles : $A=\dfrac{1}{7}, B=-\dfrac{1}{7}, C=-\dfrac{2}{7}$, et :

$\dfrac{1}{(u-2)(u^2+3)} = \dfrac{(1/7)}{u-2} - \dfrac{(1/7)u+(2/7)}{u^2+3}$

Donc :

$\dfrac{1}{x^6-2x^4+3x^2-6} = \dfrac{1}{(x^2-2)(x^4+3)} = \dfrac{(1/7)}{x^2-2} - \dfrac{(1/7)x^2+(2/7)}{x^4+3}$.

On aura alors :

$\dfrac{1}{x^2-2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}$

et :

$\dfrac{x^2+2}{x^4+3} = \dfrac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}} + \dfrac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}}$.

Comme les fonctions utilisées sont paires, on doit avoir $a(-x)+b = cx+d$ donc $a=-c, b=d$.

Les techniques usuelles (multiplier par $x^2+x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ puis prendre $x=$ une des racines complexes) marchent, mais peuchère quelle misère avec ces racines !

Essayons autrement : faisons $x=0$, on obtient (en utilisant $d=b$) : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}+\dfrac{b}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ensuite en réduisant au même dénominateur, le coefficients de x^2 au numérateur sera, compte tenu de $a=-c$:
$a\sqrt{2\sqrt{3}}+b+(-a)(-\sqrt{2\sqrt{3}})+d = 2(a\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3})$. Ce coefficient doit être égal à 1, donc :
$a=-c=\dfrac{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$.

Une fois obtenue cette décomposition :

$$\frac{1}{x^6-2x^4+3x^2-6} = \frac{1}{14\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{14\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} + (1/7)\frac{\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}x+\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2-x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}} - (1/7)\frac{\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}x-\frac{\sqrt{3}}{3}}{x^2+x\sqrt{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}},$$

on peut calculer la primitive de chaque terme par les procédés usuels (et, il faut le dire, bien pénibles avec ce type de coefficients... Bon courage !).

Exercice 7 : Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, avec $a > b$; prouver l'inégalité :
$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \qquad .$$

Exercice 8 :

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, justifiez la formule :
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - ... + (-1)^n t^n + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

(b) En déduire :
$$\forall n \geq 1, \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt.$$

(c) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$.

(d) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}) = \ln(2)$.

Exercice 9 : On définit la fonction suivante sur $[1,+\infty[$: $\forall t \geq 1, f(t) = \dfrac{1}{E(t)} - \dfrac{1}{t}$.

(a) Prouver que, pour tout $t \geq 1, 0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{E(t)^2}$.

(b) En déduire : $\forall n \geq 2, \displaystyle\int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2} + \int_1^{n-1}\frac{1}{t^2}dt$.

(c) On pose $\forall n \geq 1, u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\gamma \in]0;1,5[$ (constante d'Euler : on pourra montrer que la suite est croissante et majorée par $1,5$).

(c) Prouver qu'on a aussi : $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) - \ln(n)\right] = \gamma$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction qui soit $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[a,b]$. Prouver la formule de Taylor avec reste intégral :
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt.$$

Exercice 11 : Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$, avec $a < b$; on pose $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

(a) Justifier qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'(t)| \leq M$.

(b) Prouver que si $u < v$ dans $[a,b]$, on a : $\displaystyle|\int_u^v f(t)dt - f(u)(v-u)| \leq M\frac{(v-u)^2}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, $a_0 = a, a_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$, $\quad a_2 = a + 2\dfrac{b-a}{n}$, $\quad ...,\quad a_{n-1} = a + (n-1)\dfrac{b-a}{n}$, $\quad a_n = b$. Par ailleurs on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$.

(c) Prouver que $|S_n - I| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{n}$. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 12 [carrément plus dur...] : Soit $a < b$, f continue sur $[a,b]$, et $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

On appelle subdivision de l'intervalle $[a,b]$ toute suite finie $a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$. Le pas de la subdivision est le réel $\delta = \max(a_1 - a_0, a_2 - a_1, ..., a_n - a_{n-1})$. Une telle subdivision correspond à un découpage de $[a,b]$ en n intervalles, et la plus grande des longueurs des intervalles de la subdivision est δ. On appelle somme de Riemann de f sur une telle subdivision tout nombre R qui peut s'écrire :
$$R = f(\xi_1)(a_1 - a_0) + f(\xi_2)(a_2 - a_1) + ... + f(\xi_n)(a_n - a_{n-1}), \text{ où } \xi_1 \in [a_0, a_1],\quad \xi_2 \in [a_1, a_2],\quad ...,\quad \xi_n \in [a_{n-1}, a_n].$$

(a) Montrer que pour toute subdivision, on peut trouver un choix de réels $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tel que : $R = I$ (utiliser le théorème de la moyenne).

(b) On admet que f est uniformément continue c'est-à-dire que :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in [a,b], |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision de $[a,b]$ de pas $< \delta$, et pour toute somme de Riemann R associée à une telle subdivision, on a : $|R - I| < \varepsilon$.

(c) Montrer que si f est continûment dérivable, elle est uniformément continue.

(d) Montrer que toute fonction continue est uniformément continue : si $\varepsilon > 0$ est donné, on considère l'ensemble E des $u \in [a,b]$ pour lesquels il existe $\eta_u > 0$, tel que :
$$(a \leq x, y \leq u \text{ et } |x - y| < \eta_u) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Montrer qu'en fait, $E = [a,b]$, en étudiant la borne supérieure de E.