Université de Caen - UFR de Sciences Année universitaire 2008-2009

Licence de Mathématiques (L1)
TD n^o 5 (Calcul d'intégrales).

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes, si elles sont définies...

(a) $\int_0^7 x^3 - x^2 dx$; (b) $\int_{-7}^7 x^3 - x dx$; (c) $\int_{-1}^1 2^x dx$; (d) $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{x} dx$; (e) $\int_0^{-1} \frac{-1}{2^{-x}} dx$;

(f) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$; (g) $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} dx$; (h) $\int_2^4 \frac{1}{x.\ln(x)} dx$; (i) $\int_0^\pi \cos(x) dx$; (j) $\int_0^\pi \cos(5x) dx$;

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{5}) dx$; (l) $\int_0^{2\pi} \cos(n.x) dx, n \in \mathbb{Z}$; (m) $\int_0^{2\pi} \cos(n.x)\cos(m.x) dx, (n,m) \in \mathbb{Z}^2$;

(n) $\int_0^{2\pi} \sin(n.x)\cos(m.x) dx, (n,m) \in \mathbb{Z}^2$; (o) $\int_0^{2\pi} \sin(n.x)\sin(m.x) dx, (n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

(p) $\int_0^\pi \frac{1}{\cos(x)} dx$; (q) $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\cos(x)-3} dx$; (r) $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)^3 dx$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une ou plusieurs intégrations par parties...

(a) $\int_1^3 \ln(x) dx$; (b) $\int_{-1}^1 x e^x dx$; (c) $\int_0^{2\pi} x \sin(x) dx$; (d) $\int_0^{2\pi} x^2 \sin(x) dx$;

(e) $\int_0^1 (ax^2+bx+c)e^x dx$; (f) $\int_0^\pi e^x \sin(x) dx$; (g) $\int_1^x t\ln(t) dt$; (h) $\int_1^x t^\alpha \ln(t) dt \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$;

(i) $\int_{-x}^x t^2.2^t dt$; (i) $\int_0^1 Arctan(x) dx$; (k) $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes, en utilisant éventuellement une ou plusieurs des intégrations par parties :

(a) $\int \tan(x) dx$; (b) $\int x.Arctan(x) dx$; (c) $\int \ln(1+x^2) dx$; (d) $\int x^3 e^x dx$; (e) $\int x e^{-x^2} dx$;

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes, en utilisant le changement de variable de votre choix...

(a) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$ (on peut choisir $u = \sqrt{x}$) ; (b) $\int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$ (on peut choisir $u = \sqrt[3]{x}$) ;

(c) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{2+\sin(x)} dx$ (on peut poser $u = \sin(x)$) ; (d) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ (on peut choisir $u = e^x$) ;

(e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^x}{x^2} dx$ (on peut bien choisir ce qu'on veut...) ; (f) $\int_0^2 \frac{2^x}{4^x+1} dx$.

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes, en utilisant éventuellement des changements de variables et des intégrations par parties :

(a) $\int x^2 \tan(x^3) dx$; (b) $\int \frac{\sin(2x)+2\cos(x)}{\sin(x)+3} dx$; (c) $\int \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u^3} dx$; (d) $\int \ln(\cos(x)+1)\sin^3(x) dx$;

(e) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$; (f) $\int 3^x \sqrt{1+9^x} dx$; (g) $\int \cos(x)\sqrt{1+\sin^2(x)} dx$.

Exercice 6 : Décomposer en éléments simples les fractions suivantes, puis calculer une primitive (en précisant un intervalle où ce calcul est valable) :

(a) $\frac{1}{x^2-1}$; (b) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; (c) $\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$; (d) $\frac{1}{x^4+1}$;

(e) $\frac{1}{x^4-1}$; (f) $\frac{x^3}{x^2+6x+5}$; (g) $\frac{x^3+3x+4}{x^3+3x-4}$; (h) $\frac{1}{x^6-2x^4+3x^2-6}$.

Exercice 7 : Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, avec $a > b$; prouver l'inégalité :

$$|\int_a^b f(t)dt| \le \int_a^b |f(t)|dt \quad .$$

Exercice 8 :

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, justifiez la formule :
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - ... + (-1)^n t^n + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$
(b) En déduire :
$$\forall n \geq 1, \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt.$$
(c) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, on a : $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$.

(d) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}) = \ln(2)$.

Exercice 9 : On définit la fonction suivante sur $[1, +\infty[$: $\forall t \geq 1, f(t) = \dfrac{1}{E(t)} - \dfrac{1}{t}$.

(a) Prouver que, pour tout $t \geq 1, 0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{E(t)^2}$.

(b) En déduire : $\forall n \geq 2, \displaystyle\int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2} + \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2}dt$.

(c) On pose $\forall n \geq 1, u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\gamma \in]0; 1,5[$ (constante d'Euler : on pourra montrer que la suite est croissante et majorée par $1,5$).

(c) Prouver qu'on a aussi : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) - \ln(n)\right] = \gamma$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction qui soit $(n+1)$ fois continûment dérivable sur $[a, b]$. Prouver la formule de Taylor avec reste intégral :
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt.$$

Exercice 11 : Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$, avec $a < b$; on pose $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

(a) Justifier qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'(t)| \leq M$.

(b) Prouver que si $u < v$ dans $[a, b]$, on a : $\left|\displaystyle\int_u^v f(t)dt - f(u)(v-u)\right| \leq M\dfrac{(v-u)^2}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, $a_0 = a, a_1 = a + \dfrac{b-a}{n}$, $\quad a_2 = a + 2\dfrac{b-a}{n}$, $\quad ...,\quad a_{n-1} = a + (n-1)\dfrac{b-a}{n}$, $\quad a_n = b$.

Par ailleurs on note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$.

(c) Prouver que $|S_n - I| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{n}$. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 12 [carrément plus dur...] : Soit $a < b$, f continue sur $[a, b]$, et $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute suite finie $a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < a_n = b$. Le pas de la subdivision est le réel $\delta = \max(a_1 - a_0, a_2 - a_1, ..., a_n - a_{n-1})$. Une telle subdivision correspond à un découpage de $[a, b]$ en n intervalles, et la plus grande des longueurs des intervalles de la subdivision est δ. On appelle somme de Riemann de f sur une telle subdivision tout nombre R qui peut s'écrire :

$R = f(\xi_1)(a_1 - a_0) + f(\xi_2)(a_2 - a_1) + ... + f(\xi_n)(a_n - a_{n-1})$, où $\xi_1 \in [a_0, a_1]$, $\quad \xi_2 \in [a_1, a_2]$, $\quad ...,\quad \xi_n \in [a_{n-1}, a_n]$.

(a) Montrer que pour toute subdivision, on peut trouver un choix de réels $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tel que : $R = I$ (utiliser le théorème de la moyenne).

(b) On admet que f est uniformément continue c'est-à-dire que :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision de $[a, b]$ de pas $< \delta$, et pour toute somme de Riemann R associée à une telle subdivision, on a : $|R - I| < \varepsilon$.

(c) Montrer que si f est continûment dérivable, elle est uniformément continue.

(d) Montrer que toute fonction continue est uniformément continue : si $\varepsilon > 0$ est donné, on considère l'ensemble E des $u \in [a, b]$ pour lesquels il existe $\eta_u > 0$, tel que :
$$(a \leq x, y \leq u \text{ et } |x - y| < \eta_u) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Montrer qu'en fait, $E = [a, b]$, en étudiant la borne supérieure de E.