Licence de Mathématiques (L1)
TD n^o 4 (Fonctions: Calculs de dérivées, accroissements finis, formules de Taylor).
Corrigé des exercices

Dérivée

Exercice 1 : (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x})$, en précisant bien sur quel(s) intervalle(s) le ou les calculs sont valables. Que penser du résultat ?

Appelons f la fonction étudiée.

On applique les formules de calcul des dérivées. Remarquons que Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ (c'est la bijection réciproque de tan $:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, donc elle envoie $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. En revanche $\frac{1}{x}$ est défini si $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

D'après le cours, on sait que : $Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, d'où :

$$[Arctan(\frac{1}{x})]' = (\frac{1}{x})'.Arctan'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{(\frac{1}{x})^2} = -\frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi : $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$

Une fonction dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle. Ceci s'applique sur les deux intervalles qui composent D_f, donc on peut en déduire que f est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.

En regardant les valeurs ou les limites en des points particuliers comme $+\infty, 0^+, \sqrt{3}$ ou 1, on trouve la valeur de cette constante. Par exemple en $x = 1$:

$f(1) = Arctan(1) + Arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

On a donc :

$$\forall x > 0, Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.$$

Et, en remarquant que f est impaire ou en calculant en $x = -1$:

$$\forall x < 0, Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}.$$

(b) Même(s) question(s) pour les fonctions $x \mapsto Arcsin(\cos(x))$ et $x \mapsto Arccos(\sin(x))$.

On s'appuie sur $Arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, Arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Les deux fonctions g, h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ (car $Arccos, Arcsin$ sont définies sur $[-1,1]$ et $\sin, \cos$ sont à valeurs dans $[-1,1]$). Mais $Arccos, Arcsin$ n'étant pas dérivables en ± 1, les fonctions étudiées ne sont pas dérivables aux points où $\cos(x) = \pm 1$ pour g, c'est-à-dire en $x = k.\pi, k \in \mathbb{Z}$, et aux points où $\sin(x) = \pm 1$ pour h, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Calculons :

$g'(x) = (\cos(x))' Arcsin'(\cos(x)) = -\sin(x)\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = -\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|} = \pm 1$

$h'(x) = (\sin(x))' Arccos'(\sin(x)) = \cos(x)[-\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}] = -\frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} = \pm 1$

$g'(x) = -1$ quand le sinus est positif, soit sur $...\cup]-2\pi,-\pi[\cup]0,\pi[\cup]2\pi,3\pi[\cup...$, et $g'(x) = 1$ sur $...\cup]-3\pi,-2\pi[\cup]-\pi,0[\cup]\pi,2\pi[\cup....$

Cela signifie que $g(x) = x+$Cte sur les intervalles où $g'(x) = 1$, et que $g(x) = -x+$Cte sur les intervalles où $g'(x) = -1$, par exemple sur $[0,\pi]$ on trouve $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$, et on complète la valeur de g par exemple par périodicité et par parité.

De même $h'(x) = -1$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], h(x) = \frac{\pi}{2} - x$, puis $h'(x) = 1$, puis -1, etc.

On remarque dans ces raisonnemennts l'usage intense des accroissements finis : g est continue sur $[0,\pi]$, dérivable seulement sur $]0,\pi[$, on en tire sa valeur sur $[0,\pi]$.

(c) Même(s) question(s) pour la fonction $x \mapsto Arccos(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}})$.

Quand cette fonction est définie et dérivable, on obtient comme dérivée :

$$[Arccos(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}})]' = (\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}})'\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sqrt{2-(\cos(x)+\sin(x))^2}}.$$

Comme on imagine bien que ceci doit se simplifier, on calcule :

$$\begin{aligned}(\sin(x)-\cos(x))^2 + (\sin(x)+\cos(x))^2 &= \sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \cos^2(x)\\ &= 2(\cos^2(x)+\sin^2(x)) = 2.\end{aligned}$$

D'où pour tout x où ce quotient est définie :

$$\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sqrt{2-(\cos(x)+\sin(x))^2}} = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sqrt{(\sin(x)-\cos(x))^2}} = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{|\sin(x)-\cos(x)|} = \pm 1.$$

On obtient le même type de dérivée (et donc de fonction) que précédemment. On pouvait s'en rendre compte : $\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}} = \cos(\dfrac{\pi}{4})\cos(x) + \sin(\dfrac{\pi}{4})\sin(x) = \cos(x - \dfrac{\pi}{4})$.

On a donc $Arccos(\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}}) = Arccos(\cos(x - \dfrac{\pi}{4})) = x - \dfrac{\pi}{4}$ quand $\frac{x-\pi}{4\in[0,\pi]}$, c'est-à-dire $x \in [\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}]$, qu'on complète intervalle par intervalle (c'est encore fois 2π-périodique et par ailleurs on peut utiliser $Arccos(-t) = \pi - Arccos(t), \cos(x+\pi) = -\cos(x), \sin(x+\pi) = -\sin(x)$).

(d) Que pouvez-vous dire de la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par : $F(t) = Arctan(\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)+1})$.

On dérive sur l'intervalle ouvert considéré (les fonctions utilisées sont dérivables) :

$$\begin{aligned}
F'(t) &= [Arctan(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1})]' \\
&= Arctan'(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1})[\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1}]' \\
&= \frac{1}{1+[\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1}]^2}\frac{(\sin(t))'(\cos(t)+1)-(\cos(t))'\sin(t)}{(\cos(t)+1)^2} \\
&= \frac{1}{(\cos(t)+1)^2+(\sin(t))^2}[(\cos(t))(\cos(t)+1)-(-\sin(t))\sin(t)] \\
&= \frac{\cos^2(t)+\cos(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)+2\cos(t)+1+\sin^2(t)} \\
&= \frac{1+\cos(t)}{2+2\cos(t)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $F(t) = \dfrac{t}{2}$+Cte, et comme $F(0)=0$, on en tire $F(t) = \dfrac{t}{2}$.

Remarque : cette fonction correspond aux formules bien connues (!) :

$$\text{si } T = \tan(\frac{t}{2}), \cos(t) = \frac{1-T^2}{1+T^2}, \sin(t) = \frac{2T}{1+T^2}, \tan(t) = \frac{2T}{1-T^2}.$$

Exercice 2 : Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $f(x) = x+1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 3-x$ si $x \notin \mathbb{Q}$ n'est nulle part dérivable. A-t-elle des points de continuité ? Que dire de la fonction f telle que $f(x) = x^{1789}$ si $x \in \mathbb{Q}$, et $f(x) = x^{1917}$ si $x \notin \mathbb{Q}$?

Regardons la première fonction : si $x \in \mathbb{Q}$, les taux d'accroissements à partir de x sont :

$$T_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)-x-1}{h}.$$

Si $h \in \mathbb{Q}$, on a $x+h \in \mathbb{Q}$ et donc :

$$T_x(h) = \frac{(x+h)+1-x-1}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

mais si $h \notin \mathbb{Q}$, on obtient :

$$T_x(h) = \frac{3-x-h-x-1}{h} = \frac{2-2x}{h} - 1.$$

Si $x \neq 1$, ce taux tend vers $\pm\infty$ si h tend vers 0. Si $x = 1$, ce taux tend vers -1. Mais comme la limite est toujours 1 sur les h rationnels, le taux d'accroissement n'a jamais de limite pour h quelconque tendant vers 0, et il n'y a jamais de dérivées.

Ob obtient le même problème pour les $x \notin \mathbb{Q}$: le taux vaudra -1 quand $x+h \notin \mathbb{Q}$, et tendra vers $\pm\infty$ quand $x+h \in \mathbb{Q}$.

Pour la deuxième fonction on a le même problème en tout $x \neq 0$, mais le taux d'accroissement en 0 a une limite puisque $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)}{h} = h^{1788}$ si $h \in \mathbb{Q}$, $= h^{1916}$ si $h \notin \mathbb{Q}$.

Ces deux expressions tendent vers 0 si $h \to 0$, donc on a $f'(0) = 0$. C'est le seul point où f' est définie.

Exercice 3 : Montrer que si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a, alors le produit (fg) est n fois dérivable en a et on a :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \qquad \textit{(formule de Leibniz).}$$

On prouve ceci par récurrence sur $n \geq 1$.

(*) Si $n = 1$, $(fg)' = f'g + fg' = C_1^0.fg' + C_1^1.f'g$.

(*) Supposons $(fg)^{(n)}(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$. On peut alors calculer :

$$(fg)^{(n+1)}(a) = [(fg)^{(n)}]' = [\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)]'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a))'$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a))$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a))$$
$$= \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(j)}(a) g^{(n-(j-1))}(a) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a))$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k))}(a) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a))$$
$$= 1.f^{(n+1)}.g + \sum_{k=1}^{n} [C_n^{k-1} + C_n^k] f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) + 1.fg^{(n+1)}$$
$$= 1.f^{(n+1)}.g + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) + 1.fg^{(n+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a).$$

Ainsi la formule est encore vraie à l'ordre $n+1$.

Par récurrence, la formule est toujours vraie.

Exercice 4 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$. Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la dérivée n-ème de f soit : $(a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$.

On prouve ceci par récurrence su n.

(*) Pour $n = 0$, on prend $a_0 = c_0 = 1, b_0 = 0$, avec la convention habituelle que $f^{(0)} = f$, on en déduit que la formule est vérifiée.

(*) Supposons que la formule est vraie pour n, c'est-à-dire qu'on a a_n, b_n, c_n tels que : $\forall x, f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$.

Pour passer au rang $n+1$ il suffit de dériver :

$\forall x,\ f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$

$= [(a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}]'$

$= [(a_n x^2 + b_n x + c_n)'(e^{-x}) + (a_n x^2 + b_n x + c_n)(e^{-x})']$

$= (2a_n x + b_n)e^{-x} + (a_n x^2 + b_n x + c_n)(-e^{-x})$

$= (-a_n x^2 + (2a_n - b_n)x + b_n - c_n)e^{-x}$

$= (a_{n+1} x^2 + b_{n+1} x + c_{n+1})e^{-x}$ avec $a_{n+1} = -a_n, b_{n+1} = 2a_n - b_n, c_{n+1} = b_n - c_n$.

La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par récurrence, a_n, b_n, c_n existent quel que soit n.

Remarque : On peut grâce aux formules trouvées calculer ces suites :

Comme $a_{n+1} = -a_n, a_0 = 0$, on a $a_n = (-1)^n$.

Comme $b_{n+1} = 2a_n - b_n = 2(-1)^n - b_n$, on en tire en posant $b'_n = (-1)^n b_n$ que $b'_{n+1} = 2 + b'_n$, et $b'_0 = 0$, donc finalement $b'_n = 2n$ et $b_n = 2(-1)^n n$.

Comme $c_{n+1} = b_n - c_n$ on a, en posant $c'_n = (-1)^n c_n$, que : $c'_{n+1} = (-1)^n b_n + c'_n = 2n + c'_n$ et $c'_0 = 1$ donc $c'_n = 2[(n-1)+(n-2)+...+1+0] + c'_0 = n(n-1)+1$, et finalement $c_n = (-1)^n(n^2 - n + 1)$.

On a donc $f^{(n)}(x) = (-1)^n[x^2 + 2nx + (n^2 - n + 1)]e^{-x}$.

Exercice 5 : Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. On pose $f(x) = P(x)$ si $x \leq 0$ et $f(x) = Q(x)$ si $x > 0$. On suppose que la fonction f est C^∞. Montrer que $P = Q$.

La fonction est indéfiniment dérivable et ses dérivées sont toutes continues, notamment en 0. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$.

Prenons $p \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0, f^{(p)}(x) = P^{(p)}(x) = p!a_p + (p+1)!a_{p+1}x + \dfrac{(p+2)!}{2!}a_{p+2}x^2 + ...$ puisque f et P sont égales sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ qui contient x (c'est un *voisinage* de x).

Par continuité, cela donne $f^{(p)}(0) = p!a_p$.

De même pour $x < 0$, on a : $f^{(p)}(x) = Q^{(p)}(x) = p!b_p + (p+1)!b_{p+1}x + \dfrac{(p+2)!}{2!}b_{p+2}x^2 + ...$, ce qui donne $f^{(p)}(0) = p!b_p$.

Ainsi $a_p = b_p$, et comme ceic est valable pour tout p, cela signifie que P et Q ont les mêmes coefficients et que $P = Q$.

Exercice 6 : Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0. Si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$, étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 : Pour toute fonction u dérivable et non nulle sur l'intervalle I, on pose $L(u) = \dfrac{u'}{u}$ (" *dérivée logarithmique*").

(a) Prouver les formules suivantes, valables si les fonctions u, v ne s'annulent pas sur I, et si $n \in \mathbb{N}$:

$$L(uv) = L(u) + L(v) \ ; \ L(u/v) = L(u) - L(v) \ ; \ L(u^n) = n.L(u).$$

$L(uv) = \dfrac{(uv)'}{uv} = \dfrac{u'v + uv'}{uv} = \dfrac{u'}{u} + \dfrac{v'}{v} = L(u) + L(v).$

$L(u/v) = \dfrac{(u/v)'}{(u/v)} = \dfrac{(u'v - uv')/v^2}{(u/v)} = \dfrac{u'v}{uv} - \dfrac{uv'}{uv} = L(u) - L(v).$

La dernière se vérifie par récurrence sur n, ou en utilisant $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, ou encore par ce que, d'après la première formule :

$L(u^n) = L(u.u...u) = L(u) + L(u) + ... + L(u) = nL(u).$

(b) Calculer la dérivée logarithmique d'une constante ; de la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé ;

La dérivée logrithmique de $x \mapsto x^\alpha$ est :

$\dfrac{(x^\alpha)'}{x^\alpha} = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha} = \alpha x^{(\alpha-1)-\alpha} = \alpha.x^{-1} = \dfrac{\alpha}{x}.$

Celle d'une constante $C \neq 0$ est $\dfrac{C'}{C} = \dfrac{0}{C} = 0.$

(c) Que dire des deux fonctions u, v (qui ne s'annulent pas etc...) si on a : $L(u) = L(v)$? Et si on a : $L(u) = \alpha.L(v)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$?

D'après (a) on a :

$L(u) = L(v) \iff L(u) - L(v) = 0 \iff L(u/v) = 0 \iff \dfrac{(u/v)'}{(u/v)} = 0 \iff (u/v)' = 0 \iff u/v = C^{\text{te}} \iff u = C.v.$

Comme :

$[|v|^\alpha]' = [e^{\alpha.\ln(|v|)}]' = [\alpha.\ln(|v|)]'.e^{\alpha.\ln(|v|)} = \alpha\frac{v'}{v}v^\alpha = \alpha v'v^{\alpha-1},$

On en déduit que la formule $L(|v|^\alpha) = \alpha.L(v)$ reste vraie si $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donc :

$L(u) = \alpha.L(v) \iff L(u) = L(|v|^\alpha) \iff u = C.|v|^\alpha.$

(d) Calculer les dérviées logarithmiques des fonctions sinus et cosinus.

$L(\cos) = \dfrac{(\cos)'}{\cos} = \dfrac{-\sin}{\cos} = -\tan, L(\sin) = \dfrac{(\sin)'}{\sin} = \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{1}{\tan}.$

(e) Montrer que $L(u)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln[|u(x)|]$. Quelle est la dérivée logarithmique d'une fonction exponentielle ? Sur quel intervalle cette dérivée logarithmique existe-t-elle ?

La fonction u ne s'annulant pas et étant dérivable ne change pas de signe. Si elle est positive, on aura :

$[\ln(|u|)]' = [\ln(u)]' = (u)'\ln'(u) = u'\dfrac{1}{u} = \dfrac{u'}{u} = L(u).$

Si elle est négative, alors :

$[\ln(|u|)]' = [\ln(-u)]' = (-u)'\ln'(-u) = -u'\dfrac{1}{-u} = \dfrac{u'}{u} = L(u).$

Dans les deux cas on retrouve $L(u)$.

Pour une fonction $u(x) = a^x$ exponentielle, on a : $\ln(|u(x)|) = \ln(a^x) = x\ln(a)$ et donc $L(u) = [x\ln(a)]' = \ln(a)$ est constante. Ce calcul est valable sur $\mathbb{R}$ (même cas pendable, comme $a = 1$).

(f) On pose pour $x \in \mathbb{R}, u(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + x}$:

(i) Donner le domaine de définition D_u de u et le signe de $u(x)$ sur les différents intervalles composant D_u ;

Le numérateur est toujours défini et positif. Le dénominateur est $x^2 + x = x(x+1)$. Conclusion : $D_u = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, et $u(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $u(x) > 0$ sur $]-1, 0[$.

(ii) Montrer que le signe de $L(u)(x)$ donne celui de $u'(x)$, et en déduire le tableau de variation de la fonction u ;

$L(u)(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc $L(u)(x)$ et $u'(x)$ sont de même signe sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, de signes opposés sur $]-1, 0[$.

Calculons :

$L(u)(x) = L(\dfrac{e^x}{x(x+1)}) = L(e^x) - L(x) - L(x+1) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x(x+1) - x - (x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x(x+1)} = \dfrac{(x-a)(x-b)}{x(x+1)},$

Avec $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6..., b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6....$

Finalement $L(u)(x)$ et $u'(x)$ dont positifs sur $]-\infty, -1[\cup]b, 0[\cup]a, +\infty[$, et négatifs sur $]-1, b[\cup]0, a[$, d'où les variations de u.

(iii) Représentation graphique.

(g) Mêmes questions pour $x \mapsto \dfrac{(x+1)(x+a)}{(x+2)(x+a+1)}$, où a est un paramètre réel fixé.

On applique les méthodes de calculs développées plus haut pour cette fonction, qu'on notera f :
$L(f)(x) = L(\dfrac{(x+1)(x+a)}{(x+2)(x+a+1)} = L(x+1)+L(x+a)-L(x+2)-L(x+a+1) = \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+a+1} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+a)(x+a+1)} = \dfrac{2x^2+(2a+4)x+a^2+a+2}{(x+1)(x+2)(x+a)(x+a+1)}$.

Comme $L(f)(x)f(x) = f'(x)$ et que le dénominateur de $L(f)(x)$ et $f(x)$ sont de même signe, $f'(x)$ est du signe du numérateur $2x^2+(2a+4)x+a^2+a+2$. On a pour ce trinôme $\Delta = (2a+4)^2 - 4\times 2\times(a^2+a+2) = -4a^2+8a = -4a(a-2)$.

Ainsi si $\Delta \leq 0$, c'est-à-dire $a \leq 0$ ou $a \geq 2$, $f'(x) > 0$ en tout x sauf peut-être 1, ce qui donne une fonction strictement croissante sur son domaine de définition. On en déduit le tableau de variation de f :

Si $a \leq 0$, $f(x)$ croît de 1 à $+\infty$ sur $]-\infty,-2[$, puis de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]-2,-a-1[$, puis de $-\infty$ à 1 sur $]-a-1,+\infty[$.

Si $a \geq 2$, $f(x)$ croît de 1 à $+\infty$ sur $]-\infty,-a-1[$, puis de $-\infty$ à $+\infty$ sur $]-a-1,-2[$, puis de $-\infty$ à 1 sur $]-2,+\infty[$.

Reste les cas où $0 < a < 2$, et $\Delta = a(2-a) > 0$. Dans ce cas $f'(x)$ est du signe de $2x^2+(2a+4)x+a^2+a+2 = 2(x-a_1)(x-a_2)$ avec $a_1 = -\dfrac{a}{2}+1-\dfrac{1}{4}\sqrt{a(2-a)}, a_2 = -\dfrac{a}{2}+1+\dfrac{1}{4}\sqrt{a(2-a)}$.

Une étude de trinôme très brève permet de voir que $0 < a < 2 \Rightarrow 0 < a(2-a) = 2a-a^2 \leq 1$, avec égalité si et seulement si $a = 1$.

On a donc $-1/4 = -2/2+1-1/4 < a_1 < a_2 < -0/2+1+1/4 = 5/4$. Ainsi, quelles que soient les positions respectives de $-a-1 \in]-3,-1[$ et -2, les racines a_1, a_2 son au-delà.

On en déduit les variations de f : elle croît de 1 à $+\infty$ sur $]-\infty, min(-2,-a-1)[$, puis croˆde $-\infty$ à $+\infty$ sur $]min(-2,-a-1), max(-2,-a-1)[$, puis croît de $-\infty$ à $f(a_1)$ sur $]max(-2,-a-1), a_1]$, décroît de $f(a_1)$ à $f(a_2)$ sur $[a_1,a_2]$, et enfin croît de $f(a_2)$ à 1 sur $[a_2,+\infty[$.

La seule exception à cette description est le cas où $min(-2,-a-1) = max(-2,-a-1) = -2$ si $a = 1$, $a_1 = -1/2+1-1/4 = 1/4, a_2 = -1/2+1+1/4 = 3/4$, auquel cas $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = (1-\dfrac{1}{x+2})^2$, la description est la même sauf l'intervalle central qui est supprimé.

On n'avait pas besoin ici du signe de $f(x)$, qui n'est pas très dur à décrire malgré tout (changement de signe en $-1,-2,-a,-a-1$).

Exercice 8 : Dans les exercices suivants, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(a) Sur la parabole d'équation $y = x^2$, trouver toutes les tangentes passant par les points suivants : $A(1,0), O(0,0), B(0,-1), C(1,-1)$.

(b) Soit Γ la courbe d'équation $y = x^3$. On se donne un point $M_0(x_0,y_0)$: à quelle(s) condition(s) sur M_0 peut-on trouver une tangente à Γ passant par M_0 ? Et deux tangentes ? Et plus de deux ?

(c) Soit $\alpha > 1$. On considère la courbe Γ_α définie par : $\Gamma_\alpha = \{M(x,y) \mid x > 0 \text{ et } y = x^\alpha\}$. Montrer qu'il y a un unique $x_\alpha > 1$ tel que la tangente à Γ_α au point d'abscisse x_α passe par le point $A(1,0)$. Etudier $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} x_\alpha$.

Accroissements finis, théorème de Rolle

Exercice 9 : La fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose $0 < a < b$ et $0 = f(a) = f(b)$. Montrer qu'il y a une tangente à la courbe de f qui passe par l'origine du repère.

La tangente à la courbe au point $C(c,f(c))$ est la droite d'équation : $y - f(c) = f'(c)(x-c)$. Cette droite passe par l'origine du repère si et seulement si le point de coordonnées $(x,y) = (0,0)$ vérifie l'équation, c'est-à-dire si :
$0 - f(c) = f'(c)(0-c) \iff f(c) - cf'(c) = 0$.

Posons $\forall x \in [a,b], g(x) = \frac{f(x)}{x}$. La fonction g est définie sur $[a,b]$ car $0 < a < b$ donc $x \neq 0$ sur $[a,b]$. Comme f, elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Notons qu'on a : $\forall x \in]a,b[, g'(x) = \frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}$ d'après la formule de dérivation d'un quotient.

On a par ailleurs $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{f(c)-cf'(c)}{c^2} = 0$, donc $f(c) - cf'(c) = 0$, donc la tangente à la courbe de f au point $(c,f(c))$ passe par l'origine.

Exercice 10 : Soient f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $[a,b]$.

a) Montrer que $g(b) \neq g(a)$.

Si on avait $g(b) = g(a)$ on pourrait appliquer le théorème de Rolle à g, on trouverait donc $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme on a supposé que g' ne s'annulait pas sur $]a,b[$, un tel c ne peut pas exister et on ne peut pas avoir $g(a) = g(b)$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

En vue d'appliquer le théorème de Rolle, on introduit une fonction auxiliaire $h(x) = f(x) - \lambda.g(x)$ qui sera comme f et g continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Peut-on choisir λ pour que les conditions du théorème de Rolle soient satisfaites ? La seule condition restant est $h(a) = h(b)$ ce qui s'écrit :

$h(a) = h(b) \iff f(a) - \lambda.g(a) = f(b) - \lambda.g(b) \iff \lambda.[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) \iff \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

On peut calculer cette valeur d'après le (a) ($g(b) - g(a) \neq 0$).

Pour cette valeur, il y a un $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, ce qui s'écrit :

$f'(c) - \lambda.g'(c) = 0 \iff \lambda = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \iff \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

On a donc obtenu ce qu'on voulait.

Exercice 11 : Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n \geq 1$ ayant n racines réelles distinctes.

(a) Montrer qu'on peut trouver des réels $u_1 < u_2 < ... < u_{n-1}$ et un réel $\lambda \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = \lambda(x - u_1)(x - u_2)...(x - u_{n-1}).$$

Entre deux racines a et b de P, comme $P(a) = P(b)$, on peut trouver un c tel que $P'(c) = 0$. En effet un polynôme étant une fonction indéfiniment dérivable le théorème de Rolle s'applique. Si on part de n racines distinctes, qu'on peut numéroter dans l'ordre : $a_1 < a_2 < ... < a_n$, on obtient une racine de P' dans $]a_1, a_2[$, une dans $]a_2, a_3[$, ..., une dans $]a_{n-1}, a_n[$. Cela fait bien $n - 1$ nombres vérifiant $a_1 < u_1 < a_2 < u_2 < a_3 < ... < a_{n-1} < u_{n-1} < a_n$. Comme P' est de degré $n - 1$, il se décompose entièrement sur $\mathbb{R}[X]$ sous la forme écrite dans l'énoncé.

(b) Qu'est-ce qui change si P a une racine réelle *multiple* ?

Supposons par exemple que a_1 soit racine double et que les autres racines soient simples. Cela fait une racine de moins : $a_1 < a_2 < ... < a_{n-1}$, et donc un intervalle de moins où appliquer le théorème de Rolle. Mais en contrepartie, a_1 est aussi racine de P' d'après la théorie des polynômes (une racine d'ordre p de P est racine d'ordre $p - 1$ de P').

Donc on obtient encore $n - 1$ racines pour P'.

On voit que ce raisonnement s'étend à tous les cas : chaque fois qu'on change l'ordre d'une racine a_k de p à $p+1$, on a un intervalle de moins et une application en moins du théorème de Rolle, mais a_k est racine d'ordre p de P'.

Au bilan, même si les racines sont multiples, P' a de toute façon $n - 1$ racines réelles, comptées avec leur ordre de multiplicité, et donc se décompose entièrement en produit de facteurs de degré 1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Généraliser ce qui précède à $P'', P^{(3)}, ...$

Par une récurrence facile, P'' a $n - 2$ racines, $P^{(3)}$ en a $n - 3$; si les racines de P sont toutes distinctes, celles de $P', P'', ...$ aussi. Si on part de racines éventuellement multiples, celles de $P', P'', ...$ le sont aussi, et on obtient les totaux $n - 1, n - 2, ...$ en comptant chaque racine avec sa mutiplicité.

(d) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...$, montrer qu'on a l'inégalité :

$$a_{n-1}^2 \geq 4\frac{n}{n-1}a_n a_{n-2}.$$

Montrer que si les racines de P sont distinctes, on peut en fait mettre $>$.

La dérivée d'ordre $(n - 2)$ de P est :

$P^{(n-2)}(x) = \dfrac{n!}{2}a_n x^2 + (n - 1)!a_{n-1}x + (n - 2)!a_{n-2}$.

D'après le (c) ce polynôme de degré 2 a 2 racines réelles donc un discriminant positif.

$\Delta = [(n - 1)!a_{n-1}]^2 - 4\dfrac{n!}{2}a_n(n - 2)!a_{n-2} = (n - 1)!(n - 2)![(n - 1)a_{n-1}^2 - 2na_n a_{n-2}] \geq 0$ ce qui donne :

$a_{n-1}^2 \geq 2\dfrac{n}{n-1}a_n a_{n-2}$.

Il y avait donc une erreur d'énoncé (4 au lieu de 2).

Si les racines sont distinctes pour P, elles le sont pour toutes des dérivées et on a donc $\Delta > 0$ d'où une inégalité stricte.

(e) Le polynôme $P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 10x - 20$ a-t-il 5 racines réelles ?

Ici $a_n = a_{n-1} = 1, a_{n-2} = 3, n = 5$, donc l'inégalité du (d) s'écrit $1^2 \geq 2\dfrac{5}{4}1.3 \iff 1 \geq \dfrac{15}{2}$. Cette inégalité n'est pas vérifiée donc P ne peut pas avoir 5 racines réelles.

Exercice 12 :

(a) On considère une fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, qu'on suppose juste dérivable (c'est-à-dire dérivable sur $]0, 1[$, dérivable à gauche en 1 et à droite en 0). On supposera aussi qu'on a $g'(0) < g'(1)$. Soit $T : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$T(0) = g'(0),\ T(t) = \frac{g(t) - g(0)}{t} \text{ si } 0 < t < 1,\ T(t) = \frac{g(1) - g(t-1)}{2 - t} \text{ si } 1 \leq t < 2 \text{ et } T(2) = g'(1).$$
Montrer que T est continue sur $[0, 2]$.

Sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$ T est continue comme quotient de fonction continue. Par définition de la dérivée :
$\lim_{t \to 0^+} T(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = T(0)$, et :
$\lim_{t \to 2^-} T(t) = \lim_{t \to 2^-} \frac{g(1) - g(t-1)}{2 - t} = \lim_{u \to 1^-} \frac{g(1) - g(u)}{1 - u} = \lim_{u \to 1^-} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = g'(1) = T(2)$ (en posant $u = t - 1$).

Reste à regarder en $t = 1$: en 1^+ la fonction T est continue à droite avec $T(1) = \frac{g(1) - g(1-1)}{2 - 1} = g(1) - g(0)$ (quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul).

Pour la même raison la limite à gauche en 1 est : $\lim_{t \to 1^-} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \frac{g(1) - g(0)}{1} = g(1) - g(0) = T(1)$. La fonction T est donc bien continue partout sur $[0, 2]$.

(b) En déduire : (i) $\forall p \in]g'(0), g'(1)[, \exists x \in]0, 2[, T(x) = p$, puis,
(ii) $\forall p \in]g'(0), g'(1)[, \exists x \in]0, 2[, g'(x) = p$.

(i) T étant continue vérifie le théorème des valeurs intermédiaires donc toute valeur p entre $T(0)$ et $T(2)$ a un antécédent par T. Comme $T(0) = g'(0), T(2) = g'(1)$, toute valeur entre $g'(0)$ et $g'(1)$ a un antécédent x_p par T, et si cette valeur est strictement entre $g'(0)$ et $g'(1)$, un réel $x_p \in [0, 2]$ tel que $T(x_p) = p$ ne peut vérifier $x_p = 0$ ou $x_p = 2$ (puisque $p \neq T(0) = g'(0)$ et $p \neq T(2) = g'(1)$.)

(ii) Soit $p \in]g'(0), g'(1)[$. On a donc $x_p \in]0, 2[$ tel que $T(x_p) = p$. Comme $0 < x_p < 2$, $T(x_p)$ s'écrit $\frac{g(x_p) - g(0)}{x_p}$ si $0 < x_p < 1$, ou $\frac{g(1) - g(x_p - 1)}{1 - (x_p - 1)}$ si $1 \leq x_p < 2$ (soit $0 \leq x_p - 1 < 1$). De toute façon c'est un taux d'accroissement de la fonction dérivable g sur un intervalle inclus dans $[0, 1]$, on peut donc appliquer le théorème des acrroissements finis.

il y a donc x entre 0 et x_p ou entre 1 et $x_p - 1$ suivant les cas, tel que ce taux soit égal à $g'(x)$. On a donc bien $g'(x) = p$.

(c) Prouver que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, pour tout x_1 et tout x_2 dans $[a, b]$, et si p est entre $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$, alors il existe x entre x_1 et x_2 tel que $f'(x) = p$. (Ce résultat s'appelle le théorème de Darboux.)

Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $f'(x_1) < f'(x_2)$. Posons alors $g(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} f[x_1 + (x_2 - x_1)t]$.
g est dérivable, de dŕivée $g'(t) = \frac{1}{x_2 - x_1}[(x_2 - x_1) f'[x_1 + t(x_2 - x_1)]] = f'(x_1 + t(x_2 - x_1))$.
En particulier $g'(0) = f'(x_1), g'(1) = f'(x_2)$, donc le (b) s'applique, et pour tout $p \in]f'(x_1), f'(x_2)[$ il existe t_p tel que $g'(t_p) = p$. Si on pose $x = x_1 + t_p(x_2 - x_1)$ on a bien $f'(x) = p$.

(d) Si f est dérivable, f' est-elle continue (*Indication :* que penser de $f(x) = x^2 \sin(x^{-2009})$?)
La dérivée de la fonction proposée n'est même pas bornée : $f'(x) = -2009 x^{-2008} \cos(x^{-2009}) + 2x \sin(x^{-2009})$ n'est bornée dans aucun voisinage de 0. Pourtant si on pose $f(0) = 0$ la fonction f est dérivable aussi en 0, puisque $\frac{f(x)}{x} = x \sin(x^{-2009})$ tend vers 0 en 0. La dérivée f' ne risque donc pas d'être continue en 0.
Une fonction comme f' est donc un exemple de fonction non continue mais vŕifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 13 : Règle de De l'Hôpital : on considère une fonction f définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$, telle que f' ait pour limite ℓ en a.

(a) Montrer que pour tout $x \in]a, b]$, il y a un réel, qu'on notera $c(x)$, tel que :
(i) $a < c(x) < x$;
(ii) $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x))$.

On applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $]a, x[$: il affirme qu'il y a un $c(x)$ entre a et x tel que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x))$, ce qu'on voulait.

(b) En déduire que f est dérivable en a, et que $f'(a) = \ell$.

On ne sait pas grand chose, *a priori*, du lien entre $c(x)$ et x, mais l'inégalité $a < c(x) < x$ prouve que $c(x) \longrightarrow a$ quand $x \longrightarrow a$, donc, par composition des limites, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow \ell$ quand $x \longrightarrow a$, c'est-à-dire que $f'(a) = \ell$.

(c) Plus généralement, si g, h sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, continues sur $[a, b]$, et telles que $\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = L$, prouver qu'on a aussi $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = L$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 10).

On applique le résultat de l'exercice 10 à g et h (au lieu de "f et g") l'intervalle $]a,x[$ (au lieu de "$]a,b[$") : il affirme qu'il y a un $c(x)$ entre a et x tel que $\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(c(x))}{h'(c(x))}$. Comme $c(x)$ est entre a et x, on a $\lim_{x\to a} c(x) = a$, qui se compose avec l'hypothèse $\lim_{y\to a} \frac{g'(y)}{h'(y)} = L$, pour donner $\lim_{t\to a} \frac{g(t)-g(a)}{h(t)-h(a)} = L$. Comme souhaité.

Exercice 14 : On pose : $\forall x>0, f(x) = \frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$.

(a) Montrer que si $x\in[1,2]$ on a : $|f'(x)| \le \frac{1}{2}, f(x)\in[\sqrt{2},\frac{3}{2}]$.

On calcule : $\forall x>0, f'(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{2}{x^2})$, fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :
$f'(1) = (1/2)(1-2) = -1/2, f'(2) = (1/2)(1-2/4) = 1/4$.
Les valeurs de f' sur $[1,2]$ vont de $-1/2$ à $1/4$, on a donc bien : $\forall x\in[1,2], |f'(x)|\le 1/2$.
Par ailleurs $f'(x)=0 \iff 1-2/x^2=0 \iff 1=\frac{2}{x^2} \iff x=\pm\sqrt{2}$.

Ainsi $1\le x<\sqrt{2} \Rightarrow f'(x)<0, \sqrt{2}<x\le 2 \Rightarrow f'(x)>0$. Autrement dit, f part de la valeur $f(1) = (1/2)(1+2) = 3/2$, décroît jusqu'à la valeur $f(\sqrt{2}) = (1/2)(\sqrt{2}+2/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, puis croît jusqu'à la valeur $f(2) = (1/2)(1+1) = 1$. On a donc bien $f([1,2]) \subseteq [\sqrt{2},3/2]$.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le premier terme $u_0\in[1,2]$, et par la relation : $\forall n, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$.

(b) Montrer que $\forall n, u_n\in[1,2]$.

On a $x\in[1,2] \Rightarrow f(x)\in[\sqrt{2},3/2]\subseteq[1,2]$ (car $1<\sqrt{2}<3/2<2$ puisque $1<2<9/4<4$, ce qui s'écrit pour la $2^{\text{ème}}$ partie $8<9<16$). Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[1,2] \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n)\in[1,2]$. Avec le fait que $u_0\in[1,2]$, on a donc une preuve par récurrence que : $\forall n, u_n\in[1,2]$.

(c) Prouver que : $\forall n, \exists c\in[1,2], \frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = f'(c)$.

On applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle de bornes $\sqrt{2}=a$ et $u_n=b$. On a donc c entre a et b tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, c'est-à-dire $f'(c) = \frac{f(u_n)-f(\sqrt{2})}{u_n-\sqrt{2}} = \frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}$. En remarquant que $[a,b]\subseteq[1,2]$ d'après (b), on a ce qu'on voulait.

(d) Prouver que : $\forall n, |u_{n+1}-\sqrt{2}| \le \frac{1}{2}|u_n-\sqrt{2}|$.

On applique le (c) et le (a) : $\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = f'(c)\in[-1/2,1/2] \Rightarrow |\frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}| \le 1/2$. Ce qu'on voulait.

(e) Prouver qu'on a : $\forall n, |u_n-\sqrt{2}| \le (\frac{1}{2})^n$, et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

On prouve que : $\forall n, |u_n-\sqrt{2}| \le (\frac{1}{2})^n$, par récurrence sur n.

(*) Cas $n=0$: u_0 et $\sqrt{2}$ sont dans $[1,2]$, de longueur 1, on a forcément : $|u_0-\sqrt{2}| \le 1 = (\frac{1}{2})^0$.

(*) Si l'inégalité est vraie au rang n : alors on peut appliquer le (d), ce qui donne :

$$\begin{aligned} |u_{n+1}-\sqrt{2}| &\le \frac{1}{2}|u_n-\sqrt{2}| \text{ (par (d))} \\ &\le \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n \text{ (par l'hypothèse de récurrence)} \\ &= (\frac{1}{2})^{n+1} \text{ (ce qu'on voulait).} \end{aligned}$$

(*) Conclusion : l'inégalité est bien vérifiée pour tout n. Comme la suite géométrique $(\frac{1}{2})^n$ tend vers 0, cette inéglaité prouve que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

(f) La convergence vous semble-t-elle rapide ? Si u_n approche $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, quel est le premier terme parmi $u_{n+1}, u_{n+2}, ...$ dont on peut dire avec certitude qu'il approchera $\sqrt{2}$ à $10^{-(p+1)}$ près ?

La convergence n'est pas très rapide avec ces estimations. L'erreur est divisée par 2 à chaque fois (du moins à ce qu'on en sait), donc si u_n approche $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, il faut attendre u_{n+4} pour avoir une erreur à coup sûr majorée par $10^{-(p+1)}$, puisque $1/10$ est entre $1/2^3 = 1/8$ et $1/2^4 = 1/16$.

(g) Montrer que sur l'intervalle $[\sqrt{2}; 1,5]$, on a en fait $|f'(x)| \leq 1/18$. Ce résultat améliore-t-il les choses ? De combien ?

D'après le (a) $f([\sqrt{2}; 3/2]) \subseteq [\sqrt{2}; 3/2]$. Donc si $u_0 \in [\sqrt{2}; 3/2]$, les autres u_n restent dans cet intervalle.

Par ailleurs sur cet intervalle $f'(x)$ varie de $f'(\sqrt{2}) = 0$ à :

$$f'(3/2) = (1/2)[1 - 2/(3/2)^2] = (1/2)[1 - 2/(9/4)] = (1/2)[1 - 8/9] = 1/18.$$

On aura donc bien $|f'(x)| \leq 1/18$ ce qui donnera une majoration :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (1/18)|u_n - \sqrt{2}| \text{ et } |u_n - \sqrt{2}| \leq (1/18)^n |u_0 - \sqrt{2}|.$$

Si u_n approche $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, u_{n+1} l'approche au moins à $10^{-p}/18 = 10^{-(p+1)}$ près : la suite converge plus vite, on gagne en gros un chiffre minimum à chaque fois. En fait $18^4 > 10^5$ donc en 4 coups, on gagne 5 chiffre ($|u_{n+4} - \sqrt{2}| \leq |u_n - \sqrt{2}|/10^5$).

Remarque : ce raisonnement prouve que, même en partant de $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$, dès que u_n est entre $\sqrt{2}$ et $3/2$, la convergence est bien plus rapide. Autrement dit ce n'est pas la suite qui ne converge pas vite, c'est notre moyen de majorer l'erreur commise qui n'est pas performant.

En fait, comme $f'(\sqrt{2}) = 0$, plus on se rapproche de $\sqrt{2}$, plus les valeurs de $f'(x)$ sont petites et plus la convergence est rapide. On peut prouver que le nombre de chiffres exacts est doublé à chaque coup.

Exercice 15 : On pose : $\forall x > 0, f(x) = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{x^2})$.

(a) Montrer que f vérifie : (i) $\forall x > 0, f(x) = x \iff x = \sqrt[3]{2}$; (ii) $\forall x \in [1, 2], f(x) \in [\sqrt[3]{2}, 2]$; (iii) $\forall x \in [1, 2], |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : (i) $u_0 \in [1, 2]$; (ii) $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(b) Montrer que u_n est bien défini et que, pour tout n, on a : $|u_{n+1} - \sqrt[3]{2}| \leq \frac{2}{3}|u_n - \sqrt[3]{2}|$.

(c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt[3]{2}$, calculer les premiers termes quand $u_0 = 1$, et améliorer les inégalités du (a) pour pouvoir, avec le minimum de calcul, donner un rationnel approchant $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-2} près.

Exercice 16 : On pose : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.

(a) Prouver que $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ et que : $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Prouver qu'on a pour tous $x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

On pose : $u_0 = 0$, et : $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(c) Montrer qu'on a : $\forall n, |u_{n+1} - u_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$.

(d) Déduire du (c) qu'on a en fait : $\forall n, |u_{n+1} - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n |u_1 - u_0|$.

(e) Prouver que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > m$, on a :

$$|u_m - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n . \frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} |u_1 - u_0| < (\frac{1}{2})^{n-1} |u_1 - u_0|.$$

(f) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et que sa limite est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation : $\cos(x) = 2x$.

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 15 : (a) Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(b) Montrer de même que, pour tout réel x, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

(c) Formuler des inégalités similaires pour la fonction sinus. Peut-on encadrer de manière similaire la fonction exponentielle ?

(d) Montrer que pour tout x, les suites trouvées aux questions (a) et (b)- pour les fonctions sinus, cosinus et exponentielle, comme $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ pour cosinus, convergent vers $\cos(x)$, $\sin(x)$ et

e^x.

(e) Montrer que la suite proposée pour $\log(1+x)$ converge vers $\log(1+x)$ si $|x| < 1$. Que se passe-t-il si $|x| \geq 1$?

(f) Trouver des suites similaires convergeant vers $\dfrac{1}{1+x}$, $Arctan(x)$.

Exercice 17 : On définit la fonction f par : $f(0) = 0$, et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et prouver, par récurrence sur n, qu'il existe pour tout entier n un polynôme P_n tel que : $\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Montrer que, quel que soit l'entier n, on a : $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

(c) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$.

(d) Quel est le développement limité de f en 0 à un ordre n ?

(e) Quand on fixe x, les séries de Taylor $f(0) + f'(0)x + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ convergent-elles vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 18 : Calculer les développements limités suivants :

(a) $x \mapsto \dfrac{\sin(x) + x}{1 + \cos(x)}$ en 0 à l'ordre 4.

(b) $x \mapsto \log(2 \sin x)$ en $\pi/6$ à l'ordre 3.

Exercice 19 : Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$.

(a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

(b) Montrer que f a un développement limité de tout ordre en 0, et calculer ce développement.

(c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \neq 0$, on a :

$$x.f^{(n)}(x) + n.f^{(n-1)}(x) = \sin^{(n)}(x).$$

(d) Prouver que, pour tout n, $f^{(n)}$ est définie et continue en 0. On pourra calculer, par récurrence sur n, un développement limité de $f^{(n)}$ a tout ordre au voisinage de 0, puis utiliser la règle de De L'Hôpital (exercice 13).

Exercice 20 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + e^x - 1$.

a) Montrer que f est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de x la dérivée de f^{-1} au point $y = f(x)$.

c) Calculer le $\text{DL}_3(0)$ de f^{-1}.