Licence de Mathématiques (L1)

TD n^o 3 (Fonctions: Calculs de dérivées, accroissements finis, formules de Taylor).

Dérivée

Exercice 1 : (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto Arctan(x) + Arctan(\frac{1}{x})$, en précisant bien sur quel(s) intervalle(s) le ou les calculs sont valables. Que penser du résultat ?

(b) Même(s) question(s) pour les fonctions $x \mapsto Arcsin(\cos(x))$ et $x \mapsto Arccos(\sin(x))$.

(c) Même(s) question(s) pour la fonction $x \mapsto Arccos(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sqrt{2}})$.

(d) Que pouvez-vous dire de la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par : $F(t) = Arctan(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1})$.

Exercice 2 : Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par $f(x) = x+1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 3-x$ si $x \notin \mathbb{Q}$ n'est nulle part dérivable. A-t-elle des points de continuité ? Que dire de la fonction f telle que $f(x) = x^{1789}$ si $x \in \mathbb{Q}$, et $f(x) = x^{1917}$ si $x \notin \mathbb{Q}$?

Exercice 3 : Montrer que si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en un point a, alors le produit (fg) est n fois dérivable en a et on a :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) \qquad \textit{(formule de Leibniz).}$$

Exercice 4 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$. Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la dérivée n-ème de f soit : $(a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$.

Exercice 5 : Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. On pose $f(x) = P(x)$ si $x \leq 0$ et $f(x) = Q(x)$ si $x > 0$. On suppose que la fonction f est C^∞. Montrer que $P = Q$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0. Si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$, étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 : Pour toute fonction u dérivable et non nulle sur l'intervalle I, on pose $L(u) = \frac{u'}{u}$ ("*dérivée logarithmique*").

(a) Prouver les formules suivantes, valables si les fonctions u, v ne s'annulent pas sur I, et si $n \in \mathbb{N}$:

$$L(uv) = L(u) + L(v) \ ; \ L(u/v) = L(u) - L(v) \ ; \ L(u^n) = n.L(u).$$

(b) Calculer la dérivée logarithmique d'une constante ; de la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé ;

(c) Que dire des deux fonctions u, v (qui ne s'annulent pas etc...) si on a : $L(u) = L(v)$? Et si on a : $L(u) = \alpha.L(v)$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$?

(d) Calculer les dérviées logarithmiques des fonctions sinus et cosinus.

(e) Montrer que $L(u)$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln[|u(x)|]$. Quelle est la dérivée logarithmique d'une fonction exponentielle ? Sur quel intervalle cette dérivée logarithmique existe-t-elle ?

(f) On pose pour $x \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{e^x}{x^2+x}$:

(i) Donner le domaine de définition D_u de u et le signe de $u(x)$ sur les différents intervalles composant D_u ;

(ii) Montrer que le signe de $L(u)(x)$ donne celui de $u'(x)$, et en déduire le tableau de variation de la fonction u ;

(iii) Représentation graphique.

(g) Mêmes questions pour $x \mapsto \frac{(x+1)(x+a)}{(x+2)(x+a+1)}$, où a est un paramètre réel fixé.

Exercice 8 : Dans les exercices suivants, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(a) Sur la parabole d'équation $y = x^2$, trouver toutes les tangentes passant par les points suivants : $A(1,0), O(0,0), B(0,-1), C(1,-1)$.

(b) Soit Γ la courbe d'équation $y = x^3$. On se donne un point $M_0(x_0, y_0)$: à quelle(s) condition(s) sur M_0 peut-on trouver une tangente à Γ passant par M_0 ? Et deux tangentes ? Et plus de deux ?

(c) Soit $\alpha > 1$. On considère la courbe Γ_α définie par : $\Gamma_\alpha = \{M(x,y) \ | \ x > 0 \text{ et } y = x^\alpha\}$. Montrer qu'il y a un unique $x_\alpha > 1$ tel que la tangente à Γ_α au point d'abscisse x_α passe par le point $A(1,0)$. Etudier $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} x_\alpha$.

Accroissements finis, théorème de Rolle

Exercice 9 : La fonction f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose $0 < a < b$ et $0 = f(a) = f(b)$. Montrer qu'il y a une tangente à la courbe de f qui passe par l'origine du repère.

Exercice 10 : Soient f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $[a,b]$.

a) Montrer que $g(b) \neq g(a)$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 11 : Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré $n \geq 1$ ayant n racines réelles distinctes.

(a) Montrer qu'on peut trouver des réels $u_1 < u_2 < ... < u_{n-1}$ et un réel $\lambda \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = \lambda(x-u_1)(x-u_2)...(x-u_{n-1}).$$

(b) Qu'est-ce qui change si P a une racine réelle *multiple* ?

(c) Généraliser ce qui précède à $P'', P^{(3)}, ...$

(d) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ...$, montrer qu'on a l'inégalité :

$$a_{n-1}^2 \geq 4\frac{n}{n-1} a_n a_{n-2}.$$

Montrer que si les racines de P sont distinctes, on peut en fait mettre $>$.

(e) Le polynôme $P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 10x - 20$ a-t-il 5 racines réelles ?

Exercice 12 :

(a) On considère une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, qu'on suppose juste dérivable (c'est-à-dire dérivable sur $]0,1[$, dérivable à gauche en 1 et à droite en 0). On supposera aussi qu'on a $g'(0) < g'(1)$. Soit $T : [0,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$T(0) = g'(0),\ T(t) = \frac{g(t)-g(0)}{t} \text{ si } 0 < t < 1,\ T(t) = \frac{g(1)-g(t-1)}{2-t} \text{ si } 1 \leq t < 2 \text{ et } T(2) = g'(1).$$

Montrer que T est continue sur $[0,2]$.

(b) En déduire : (i) $\forall p \in]g'(0), g'(1)[, \exists t \in]0,2[, T(t) = p$, puis,
(ii) $\forall p \in]g'(0), g'(1)[, \exists x \in]0,1[, g'(x) = p$.

(c) Prouver que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, pour tout x_1 et tout x_2 dans $[a,b]$, et si p est entre $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$, alors il existe x entre x_1 et x_2 tel que $f'(x) = p$. (Ce résultat s'appelle le théorème de Darboux.)

(d) Si f est dérivable, f' est-elle continue (*Indication :* que penser de $f(x) = x^2 \sin(x^{-2009})$?)

Exercice 13 : Règle de De l'Hôpital : on considère une fonction f définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, telle que f' ait pour limite ℓ en a.

(a) Montrer que pour tout $x \in]a,b]$, il y a un réel, qu'on notera $c(x)$, tel que :

(i) $a < c(x) < x$;

(ii) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$.

(b) En déduire que f est dérivable en a, et que $f'(a) = \ell$.

(c) Plus généralement, si g, h sont deux fonctions dérivables sur $]a,b[$, continues sur $[a,b]$, et telles que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = L$, prouver qu'on a aussi $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = L$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 10).

Exercice 14 : On pose : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

(a) Montrer que si $x \in [1,2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, f(x) \in [\sqrt{2}, \frac{3}{2}]$.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le premier terme $u_0 \in [1,2]$, et par la relation : $\forall n, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

(b) Montrer que $\forall n, u_n \in [1,2]$.

(c) Prouver que : $\forall n, \exists c \in [1,2], \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = f'(c)$.

(d) Prouver que : $\forall n, |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.

(e) Prouver qu'on a : $\forall n, |u_n - \sqrt{2}| \leq (\frac{1}{2})^n$, et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

(f) La convergence vous semble-t-elle rapide ? Si u_n approche $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près, quel est le premier terme parmi $u_{n+1}, u_{n+2}, ...$ dont on peut dire avec certitude qu'il approchera $\sqrt{2}$ à $10^{-(p+1)}$ près ?

(g) Montrer que sur l'intervalle $[\sqrt{2}; 1,5]$, on a en fait $|f'(x)| \leq 1/18$. Ce résultat améliore-t-il les choses ? De combien ?

Exercice 15 : On pose : $\forall x > 0, f(x) = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{x^2})$.

(a) Montrer que f vérifie : (i) $\forall x > 0, f(x) = x \iff x = \sqrt[3]{2}$; (ii) $\forall x \in [1,2], f(x) \in [\sqrt[3]{2}, 2]$; (iii) $\forall x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : (i) $u_0 \in [1,2]$; (ii) $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(b) Montrer que u_n est bien défini et que, pour tout n, on a : $|u_{n+1} - \sqrt[3]{2}| \leq \frac{2}{3}|u_n - \sqrt[3]{2}|$.

(c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt[3]{2}$, calculer les premiers termes quand $u_0 = 1$, et améliorer les inégalités du (a) pour pouvoir, avec le minimum de calcul, donner un rationnel approchant $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-2} près.

Exercice 16 : On pose : $\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.

(a) Prouver que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$ et que : $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Prouver qu'on a pour tous $x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

On pose : $u_0 = 0$, et : $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

(c) Montrer qu'on a : $\forall n, |u_{n+1} - u_{n+2}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$.

(d) Déduire du (c) qu'on a en fait : $\forall n, |u_{n+1} - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n |u_1 - u_0|$.

(e) Prouver que pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n > m$, on a :

$$|u_m - u_n| \leq (\frac{1}{2})^n . \frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} |u_1 - u_0| < (\frac{1}{2})^{n-1} |u_1 - u_0|.$$

(f) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et que sa limite est l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation : $\cos(x) = 2x$.

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 15 : (a) Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

(b) Montrer de même que, pour tout réel x, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

(c) Formuler des inégalités similaires pour la fonction sinus. Peut-on encadrer de manière similaire la fonction exponentielle ?

(d) Montrer que pour tout x, les suites trouvées aux questions (a) et (b)- pour les fonctions sinus, cosinus et exponentielle, comme $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ pour cosinus, convergent vers $\cos(x)$, $\sin(x)$ et e^x.

(e) Montrer que la suite proposée pour $\log(1 + x)$ converge vers $\log(1 + x)$ si $|x| < 1$. Que se passe-t-il si $|x| \geq 1$?

(f) Trouver des suites similaires convergeant vers $\frac{1}{1+x}$, $Arctan(x)$.

Exercice 17 : On définit la fonction f par : $f(0) = 0$, et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et prouver, par récurrence sur n, qu'il existe pour tout entier n un polynôme P_n tel que : $\forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Montrer que, quel que soit l'entier n, on a : $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

(c) Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall n, f^{(n)}(0) = 0$.

(d) Quel est le développement limité de f en 0 à un ordre n ?

(e) Quand on fixe x, les séries de Taylor $f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ convergent-elles vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 18 : Calculer les développements limités suivants :

(a) $x \mapsto \frac{\sin(x) + x}{1 + \cos(x)}$ en 0 à l'ordre 4.

(b) $x \mapsto \log(2 \sin x)$ en $\pi/6$ à l'ordre 3.

Exercice 19 : Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$.

(a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0.

(b) Montrer que f a un développement limité de tout ordre en 0, et calculer ce développement.

(c) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \neq 0$, on a :

$$x.f^{(n)}(x) + n.f^{(n-1)}(x) = \sin^{(n)}(x).$$

(d) Prouver que, pour tout n, $f^{(n)}$ est définie et continue en 0. On pourra calculer, par récurrence sur n, un développement limité de $f^{(n)}$ a tout ordre au voisinage de 0, puis utiliser la règle de De L'Hôpital (exercice 13).

Exercice 20 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + e^x - 1$.

a) Montrer que f est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de x la dérivée de f^{-1} au point $y = f(x)$.

c) Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f^{-1}.