Licence de Mathématiques (L1)
TD n^o 3 (Fonctions: limites, continuité, calculs de dérivées).

Exercice 1 : Soit $f(x) = x^n$ ($n \geq 1$).
1. Montrer que si $h \leq 1$, alors $|f(x+h) - f(x)| \leq n|h|(|x|+1)^{n-1}$.
2. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, trouver une fonction η_x vérifiant

$$\forall \epsilon > 0,\ h \leq \eta_x(\epsilon) \Rightarrow |f(x+h) - f(h)| \leq \epsilon$$

Exercice 2 :
(a) Montrer, en revenant aux définitions, que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \ell$. La Réciproque est-elle vraie ?
(b) Si f est périodique de période $T > 0$, montrer que f est aussi périodique de période $3T$. Est-elle forcément périodique de période $T/2$? Si f est périodique de période T, peut-on avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = T^2 + 1$? Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$?
(c) Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ si f est croissante et si $\forall n, f(n) = n$? Et si f est croissante et $\forall n, f(n) = \dfrac{n^3+4}{n^3+8}$?
(d) Prouver que la fonction $x \mapsto \sin(\pi.x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

Exercice 3 :
Soient f une fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$. On suppose que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \ell_2$.
(a) Montrer que f est continue en 0 si et seulement si $\ell_1 = \ell_2 = f(0)$.
(b) Que se passe-t-il si $\ell_1 = \ell_2 = 1$ et $f(0) = 0$?
(c) Si $f(x) = E(x)$, que valent $\ell_1, f(0), \ell_2$? Que vérifie dans ce cas la fonction f en 0 ? Plus généralement quels sont les points de continuité de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$? Que se passe-t-il pour les autres valeurs de la variable ?
(d) Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues en a. On définit une fonction g de la manière en posant : $g(x) = f_1(x)$ si $x \leq a$ et $g(x) = f_2(x)$ si $x > a$. Montrer que g est continue en a si et seulement si $f_1(a) = f_2(a)$.

Exercice 4 : Quels sont les points de continuité et de discontinuité des fonctions suivantes, définies sur R :
(a) $x \mapsto x - E(x)$;
(b) f telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = x.E(1/x)$;
(c) g telle que $g(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, g(x) = x^2.E(1/x)$;
(d)$x \mapsto (x - E(x) - \dfrac{1}{2})^2$.

Exercice 5 :
(a) Trouver les limites en 0^+, 0^- et 0, si elles existent, des fonctions suivantes (pour $u \in \mathbb{R}$, $[u]$ désigne la partie entière du réel u) :

$$\frac{1}{x^2} - x^2 \ ; \quad \frac{x^3+x^5}{x^2+x^4} \ ; \quad x^3 - \frac{1}{x^3} \ ; \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5} \ ;$$

$$x[\frac{1}{x}] \ ; \quad x[\frac{1}{x^2}] \ ; \quad x^2[\frac{1}{x}] \ ; \quad \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}] \ ; \quad x^2(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]).$$

$$x.\sin(\frac{1}{x}).\ln(x) \ ; \quad \ln(x) + \sin(\frac{1}{x}) \ ; \quad x.\ln(\sin(x))$$

(b) Trouver les limites en $+\infty$, si elles existent, des fonctions suivantes :

$$\frac{x^2+2}{x-1} - \frac{x^3+3}{x^2-1} \ ; \ \frac{[x]}{x} \ ; \ x - [x] \ ; \ (x-[x]).x \ ; \ ([x+\frac{1}{2}] - x).x \ ;$$

Exercice 6 : Etudier l'existence de limite en 0 pour les fonctions suivantes:

$$\sin(\frac{1}{x}) \ ; \ \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) \ ; \ \cos(x)\cos(\frac{1}{x})$$

Exercice 7 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = f(2x)$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 8 :
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On pose $h(x) = max(f(x), g(x))$.
(a) Si f et g sont croissantes, h l'est-elle?. Et si f et g sont décroissantes?
(b) Si f et g sont injectives (resp. surjectives, resp. bijectives), h l'est-elle?
(c) Si f et g sont continues, h l'est-elle? (indication: raisonner différemment suivant que $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \neq g(x)$).

Exercice 9 :
(a) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, vérifiant $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
(b) Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, vérifiant $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) = f(x)$.

Exercice 10 : Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels a une racine réelle.

Exercice 11 : Soit l'équation en x : $(E) \tan(x) = x$.
(a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, (E) admet une unique solution $X(n)$ telle que $X(n) \in]-\dfrac{\pi}{2}+n.\pi, \dfrac{\pi}{2}+n.\pi[$.
(b) Que vaut $X(0)$? Quel rapport y a-t-il entre $X(n)$ et $X(-n)$ si $n \in \mathbb{Z}$ est fixé ?
(c) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}[X(n) - n.\pi] = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 12 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$.
(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation en x : $f(x^n) = x$, admet une solution sur $[0,1]$.
(b) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n^n) = x_n$.
(c) La suite $(x_n)_n$ a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$? Si oui, laquelle, si non, pourquoi ?

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\lim\limits_{\to\infty} f(n) = +\infty$ et $\lim\limits_{\to\infty} f(-n) = -\infty$. Montrer que f est surjective.

Exercice 14 : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone, $(a, b \in \mathbb{R})$.
(a) Montrer que si I est un intervalle, alors $f^{-1}(I)$ aussi.
(b) Montrer que f est continue ssi pour tous $y_1 < y_2$ réels $f^{-1}(]y_1, y_2[)$ est un intervalle ouvert.

Exercice 15 : Simplifier les expressions suivantes :
(a) $\sin(Arcsin(x))$ pour $x \in [-1,1]$;
(b) $Arcsin(\sin(x))$ pour $x \in [0,\pi]$; et pour $x \in [0,2\pi]$? Et pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque ?
(c) $\cos(Arcsin(x))$ pour $x \in [-1,1]$;
(c) $\sin(Arccos(x))$ pour $x \in [-1,1]$;

Exercice 16 : Prouver les formules suivantes :
(a) $\forall x \in [-1,1], Arcsin(x) + Arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$;
(b) $\forall x > 0, Arctan(x) + Arctan(\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 17 :
(a) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, on pose $t = \tan(\dfrac{\theta}{2})$. Prouver qu'on a : $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}, \tan(\theta) = \dfrac{2t}{1-t^2}$;
(b) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $M(x,y)$ un point du cercle trigonométrique, distinct du point $(-1,0)$, et on note α une mesure entre $-\pi$ et π de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. Montrer qu'on a :

$$\alpha = 2.Arctan(\frac{y}{x+1})$$

(c) On garde les notations du (b). Si $P(X,Y)$ est un point du plan qui n'est pas sur la demi-droite $[O, -\vec{\imath})$, calculer en fonction des réels X et Y une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

Exercice 18 : Etudier si les réels $A = \log_2(3), B = \log_7(3), C = \log_9(3)$, sont rationnels ou non.

Exercice 19 : Etudier si les fonctions suivantes sont des bijections continues de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I (et si oui, sont elles croissantes, décroissantes ? Calculer les bornes de I.)
(a) $x \mapsto \ln(2^x + 1)$; (b) $x \mapsto \ln(\dfrac{1}{3^x} + 2)$; (c) $x \mapsto \ln(2^x - 1)$.

Exercice 20 : Pouvez-vous donner un exemple de bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui soit impaire ? Paire ?