Licence de Sciences et Technologies **EM21 - Analyse**

Fiche d'exercice 1 - Nombres réels et sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

1)- Existe-t-il un nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$? Et tel que $r^2 = 3$?

2)- Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$, et dire si elles ont des solutions dans $\mathbb{Q}$:

$$\frac{3x+1}{x+2} = 1 \qquad x^2 = x + 1 \text{ (nombre d'or)}$$
$$x^2 + x + 3 = 0 \qquad 2x^2 + x - 1 = 0$$
$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

3)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes :

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \qquad |x-1| + |x| > 2$$
$$|x+3| < 2x \qquad x(x-1)...(x-n) > 0$$

(discuter suivant les valeurs de n).

4)- Les ensembles suivants sont-ils des intervalles, et si oui de quels type ?
$A = [0,1[\cup[1,3[; B =]0,2[\cup]3,5[; C =]0,12[\cup[1,2]; D = [0,2] \cup [6,11] \cup [1,8]; E = [0,7] \setminus [3,8]; F = [0,7] \setminus [3,5].$

5)- Mêmes questions pour les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ | x^2 > 9\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} | \sin(x) > 0\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{R} | x^4 > 1\};$$
$$D = \mathbb{R}^* = R \setminus \{0\}; \qquad E = \mathbb{Q}; \qquad F = R \setminus \mathbb{Q}$$

(l'ensemble des nombres irrationnels.)

6)- Soient deux nombres réels x, y vérifiant $1 \leq x, y \leq 2$. Encadrer les quantités $x + y$, $x - y$, x/y.

7)- Soient deux nombres réels x, y, tels que $|x - 1| \leq 2$, et $-5 \leq y \leq -4$. Encadrer les quantités suivantes : $x + y$, $x - y$, xy, x/y, $|x| + |y|$.

8)- Soient x, y, des réels tels que $|x - 2| \leq 3$, et $|y + 1| \leq 3/2$. Encadrer les quantités $x + y$, $x - y$, xy, $x^2 + y^2$.

9)- a) On donne $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Encadrer $3 + 2\sqrt{2}$, puis $7 - 9\sqrt{2}$. On donne aussi $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$. Trouver un a tel que $|a/100 - x| < 10^{-2}$ si $x = 11 - 13\sqrt{2}$. Encadrer de même à 10^{-2} près $(2 - \sqrt{2})^3$.

b) On donne $3,141592 < \pi < 3,141593$. Encadrer à 10^{-2} près le nombre $r > 0$ tel que la longueur du disque de rayon r soit égaleà 1.

10)- Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x - y| | x, y \in A\} = \sup(A) - \inf(A)$.

11)- On se donne $t < -3$. On pose $f(x) = |3 + tx|$. Donner le graphe de f et calculer $\inf\{f(x)|x \in [0,1]\}$ et $\sup\{f(x)|x \in [0,1]\}$.

12)- Déterminer : $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} (|3x + 1| + |x - 1|)$. On pourra tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |3x+1|+|x-1|$.

Plus généralement déterminer : $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} (|3x + 1| + |x + a|)$ en fonction de a. Si on nomme ce nombre m_a,

déterminer : $\inf\limits_{a \in [0,2]} m_a$, et : $\sup\limits_{a \in [0,2]} m_a$.

13)- Les ensembles suivants ont-ils un plus grand élément dans $\mathbb{R}$, et une borne supérieure ? et si oui lequel ?

$$A = [0,2]; \qquad B = [0,1[; \qquad C = \mathbb{Z}; \qquad D = \mathbb{Q} \cap [0,1];$$
$$E = Q \cap [0,\pi]; \quad F = \{x | x^2 + |x| < 1\}; \quad G = \{x | x^2 - 3|x| \leq 2\}; \quad H = G \cap \mathbb{Q}; \quad .$$
$$L = [0,10] \cap \mathbb{Z}; \qquad M = [0,10] \cap \mathbb{N}; \qquad P =]-\infty, 3] \cap \mathbb{Q}; \qquad R =]2, +\infty[\cap \mathbb{Z}$$

14)- L'ensemble des $x \in \mathbb{Q}$ tels que $x^4 > 3$ a-t-il une borne inférieure dans $\mathbb{Q}$? Et l'ensemble des $x \in \mathbb{Q}$ tels que $x^3 < 2$? Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$? Et dans $\mathbb{R}$?

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ et } x^2 + x < 3/4\}; \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ et } x^2 + x < 1\};$$
$$C = \{x \in \mathbb{Q} | -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ et } \sin(x) < 0\}; \quad D = \{x \in \mathbb{Q} | 0 < x < \pi \text{ et } cos(x) > 0\}.$$

15)- Trouver l'ensemble des nombres réels a qui peuvent s'écrire $a = x + y$ avec deux réels x, y tels que $xy = 1$. Cet ensemble change-t-il si on exige x et y distincts ? et x, y positifs ? Les ensembles trouvés ont-ils des bornes ? Des éléments maximum ou minimum ?

16)- a) Soit A l'ensemble des nombres de la forme $1/n + 1/m + 1/p$ avec n, m, p entiers > 1 et $n < m < p$. Cet ensemble est-il majoré ? minoré ? A-t-il une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit ? Préciser le cas échéant leurs valeurs, et donner exactement l'ensemble des majorant et l'ensemble des minorants de A.

b) Soit $B = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. B a-t-il des bornes ? des éléments extremums ?

c) Mêmes questions pour $C = \{\sqrt{n+m} - \sqrt{n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ et $D = \{\sqrt{n+1-1/m} - \sqrt{n} \mid n, m \in \mathbb{N}*\}$.

17)- Etudier l'ensemble des réels x qui s'écrivent $yE(1/y)$ pour un $y > 0$.

18)- Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

19)- L'ensemble des nombres dont le carré est rationnel est-il dense dans $\mathbb{R}$? Et l'ensemble des carrés des nombres rationnels ?

20)- a) Soit A l'ensemble des nombres qui s'écrivent $p + 1/q$ pour deux entiers p, q :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^*, x = p + 1/q\}.$$

Etudier si l'ensemble A est dense.

b) Même question pour l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q, n \in \mathbb{N}, x = p + q(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$.