Devoir maison - à faire pour le 23 février

EXERCICE 1 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - 1$ sont de même signe.

(b) Déduire du (a) que :

(i) Si $u_0 \in]0, 1[, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et majorée par 1 ;

(ii) Si $u_0 \in]1, +\infty[, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et minorée par 1 ;

(c) Expliquez le comportement de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$, en discutant suivant les valeurs de u_0.

EXERCICE 2

(A) On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et on fait l'hypothèse que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \in [0, 1[.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ et un rang N_0 tel que : $\forall n \geq N_0, x_{n+1} \leq k.x_n$.

(b) Prouver la majoration suivante : $\forall n \geq N_0, 0 < x_n \leq \frac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.

(c) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(B) Applications :

En utilisant le (A), trouver les limites des suites suivantes : $a_n = \frac{n^{10}}{10^n}, b_n = \frac{3^n}{n!}, c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$.