UNIVERSITE DE CAEN **Année Universitaire 2007-2008**

Licence de Sciences et Technologie 1

EM21 - Epreuve d'analyse - Corrigé

Exercice 1

1) On pose $u(t) = u'(t) = e^t$. En utilisant plusieurs fois l'intégration par partie, on peut abaisser le degré du polynôme en facteur :

$\int_0^1 (t^2+1)e^t dt = \int_0^1 v_1(t)u'(t)dt$ (avec $v_1(t) = t^2+1, v_1'(t) = 2t$).

$= [v_1(t)u(t)]_0^1 - \int_0^1 v_1'(t)u(t)dt$

$= [(t^2+1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt$

$= [(t^2+1)e^t]_0^1 - \int_0^1 v_2(t)u'(t)dt$ (avec $v_2(t) = 2t, v_2'(t) = 2$).

$= [(t^2+1)e^t]_0^1 - \left([v_2(t)u(t)]_0^1 - \int_0^1 v_2'(t)u(t)dt\right)$

$= [(t^2+1)e^t]_0^1 - [2te^t]_0^1 + \int_0^1 2e^t dt$

$= [(t^2+1)e^t]_0^1 - [2te^t]_0^1 + [2e^t]_0^1$

$= [2e-1] - [2e-0] + [2e-2]$

$= 2e - 3.$

2) a) On utilise la formule $\int_a^b f(x(t))x'(t)dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)dx$.

Si on pose $x(t) = 2\cos(t)$, on a d'une part $x(0) = 2, x(\frac{\pi}{3}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, et d'autre part $x'(t) = -2\sin(t)$, donc :

$$\frac{2\sin t\cos(t)}{(2\cos(t)-3)(1+2\cos^2 t)} = \frac{\frac{-x'(t)}{2}x(t)}{(x(t)-3)(1+2(\frac{x(t)}{2})^2)} = -\frac{x(t)}{(x(t)-3)(2+x(t)^2)}.x'(t).$$

Il s'ensuit que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x(t)}{(x(t)-3)(2+x(t)^2)}.x'(t)dt$$

$$= \int_{x(0)}^{x(\frac{\pi}{3})} -\frac{x}{(x-3)(2+x^2)}dx = -\int_2^1 \frac{x}{(x-3)(x^2+2)}dx = \int_1^2 \frac{x}{(x-3)(x^2+2)}dx.$$

b) Le dénominateur est déjà décomposé en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ puisque $x-3$ est de degré 1 et x^2+2 n'est pas factorisable sur $\mathbb{R}$ (racines $\pm\sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$).

Le numérateur est de degré plus petit que le dénominateur, donc la fraction n'a pas de partie entière, et elle s'écrit :

$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$ avec $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Cette égalité sera valable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Multiplions par $x-3$, il vient : $\frac{x}{x^2+2} = A + (x-3)\frac{Bx+C}{x^2+2}$. Cette égalité entre fractions, vraie pour tout $x \neq 3$, est encore vraie pour $x = 3$, ce qui donne :

$\frac{3}{3^2+2} = A + 0$ ou $A = \frac{3}{11}$.

Par suite $\frac{x}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{\frac{3}{11}}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \Rightarrow \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{x}{(x-3)(x^2+2)} - \frac{\frac{3}{11}}{x-3} = \frac{11x-3(x^2+2)}{11(x-3)(x^2+2)} = \frac{-3x^2+11x-6}{11(x-3)(x^2+2)} = \frac{(x-3)(-3x+2)}{11(x-3)(x^2+2)} = \frac{-3x+2}{11(x^2+2)}$.

Finalement : $A = \frac{3}{11}, B = -\frac{3}{11}, C = \frac{2}{11}$, et :

$f(x) = \frac{x}{(x-3)(x^2+2)} = \frac{\frac{3}{11}}{x-3} + \frac{-\frac{3}{11}x + \frac{2}{11}}{x^2+2}$.

c) On a (sur $[1,2]$ il n'y a pas de problème de définition) :

$\int \frac{1}{x-3}dx = \int \frac{-1}{3-x}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}du = \int \frac{1}{u}du = \ln(u) = \ln(3-x)$ en posant $u = 3-x > 0$ sur $[1,2]$,

$\int \frac{x}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$, en posant $u(x) = x^2+2$, et enfin $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u'(x)}{u(x)^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\frac{x}{\sqrt{2}})$ en posant $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

d) D'après le (b) et le (c) une primitive de f est :
$\frac{3}{11}\ln(3-x) - \frac{3}{11}\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{2}{11}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\frac{x}{\sqrt{2}})$.

Donc $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{11}[\ln(3-x)]_1^2 - \frac{3}{22}[\ln(x^2+2)]_1^2 + \frac{2}{11\sqrt{2}}[\text{Arctan}(\frac{x}{\sqrt{2}})]_1^2 = \frac{3}{11}[\ln(1)-\ln(2)] - \frac{3}{22}[\ln(6) - \ln(3)] + \frac{2}{11\sqrt{2}}[\text{Arctan}(\sqrt{2}) - \text{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{2}})] = -\frac{9}{22}\ln(2) + \frac{\sqrt{2}}{11}[\text{Arctan}(\sqrt{2}) - \text{Arctan}(\frac{1}{\sqrt{2}})]$

(en remarquant que $\ln(6)-\ln(3) = \ln(6/3) = \ln(2)$. L'autre partie ne se simplifie pas vraiment).

Exercice 2

1) Entre nombres positifs, on a : $1 < \sqrt{e} < 3 \iff 1^2 = 1 < e < 3^2 = 9$. Or :
$1 < 2,71828 < e < 2,71829 < 9$ d'après l'approximation fournie (qui était d'une précision superflue !).

2) Appliquons la formule de Taylor Lagrange rappelée dans l'énoncée avec $f(t) = e^t$, $a = 0$, $b = x > 0$ fixé, $n = 3$. Comme les dérivées de la fonction exponentielle sont toutes égales, $f(t) = f'(t) = f''(t) = ... = e^t$, donc $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La formule s'écrit prouve donc qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que :
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$, ou encore :
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{e^c}{24}x^4$.

Autrement dit le réel $D = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)$ s'écrit $\frac{e^c}{24}x^4$ pour un certain $c \in]0, x[$. Mais comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :
$0 < c < x \Rightarrow 1 = e^0 < e^c < e^x \Rightarrow \frac{1}{24}x^4 < \frac{e^c}{24}x^4 < \frac{e^x}{24}x^4$.

Ceci prouve que $\frac{1}{24}x^4 < D < \frac{e^x}{24}x^4$, ou encore :
$\frac{1}{24}x^4 < e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3) < \frac{e^x}{24}x^4$, soit enfin :
$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4e^x}{24}$.

3) Appliquons la formule précédente avec $x = \frac{1}{2}, e^x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

On aura : $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{48+24+6+1}{48} = \frac{79}{48}$, et $\frac{x^4e^x}{24} = \frac{(\frac{1}{2})^4\sqrt{e}}{24} = \frac{\sqrt{e}}{16\times 24} < \frac{3}{16\times 8\times 3} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100} = 10^{-2}$.

Le (2) donne donc : $\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{x^4e^x}{24} < \frac{79}{48} + 10^{-2}$.

Le nombre rationnel $\frac{79}{48}$ est donc une approximation par défaut de $\sqrt{e}$ à 10^{-2} près.

On a : $\frac{79}{48} = 1,64...$ ce qui est le début d'écriture demandée.

Remarque : On ne demandait pas les deux premiers chiffres de $\sqrt{e}$ qui sont plus subtils à préciser. En effet la division donne juste $1,64 < \frac{79}{48} < 1,65$ mais comme $\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + 10^{-2}$, on pourrait a priori avoir $1,65 < \sqrt{e} < 1,66$. Pour avoir une valeur approchée *décimale à 2 chiffres* de $\sqrt{e}$, il faudrait affiner les calculs...

Exercice 3

1ère partie : On considère deux fonctions u et v définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$, telles que : $\forall x, u(x) > 0$ et que $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} u(x), \ell' = \lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ soient définies dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. On pose $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

On veut étudier différents cas où, à partir des limites ℓ et ℓ', on peut ou on ne peut pas en déduire le comportement de $f(x)$ quand x tend vers x_0.

a) On a pour tout x où f est définie : $\ln(f(x)) = v(x)\ln(u(x))$.
Quand x tend vers x_0, $v(x)$ tend vers $\ell' \in \mathbb{R}$, et $u(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ donc, par continuité du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(u(x))$ tend vers $\ln(\ell)$ et par multiplication de limites finies $\ln(f(x))$ tend vers $\ell'\ln(\ell) = \ln[\ell^{\ell'}]$.

Comme le logarithme est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit $f(x)$ tend vers $\ell^{\ell'}$ (cela revient à utiliser $f(x) = e^{\ln(f(x))}$).

b)

Si $u(x)=e^x, v(x)=\dfrac{1}{x^2}, f(x)=(e^x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{x.\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x}}\longrightarrow e^0=1$ quand $x\to+\infty$, par continuité de l'exponentielle en 0 ;
Si $u(x)=e^x, v(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, f(x)=(e^x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{x.\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{\sqrt{x}}\longrightarrow+\infty$ quand $x\to+\infty$, car $\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$;
Si $u(x)=e^x, v(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}, f(x)=(e^x)^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{x.(-\frac{1}{\sqrt{x}})}=e^{-\sqrt{x}}\longrightarrow 0$ quand $x\to+\infty$, car $\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$;
Si $u(x)=e^x, v(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}, f(x)=(e^x)^{\frac{\sin(x)}{x}}=e^{x.\frac{\sin(x)}{x}}=e^{\sin(x)}$ n'a pas de limite quand $x\to+\infty$, comme la fonction sinus ; on peut le vérifier facilement, car si cette fonction avait une limite $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, on aurait $f(u_n)\longrightarrow\ell$ pour toute suite $(u_n)_n$ de réels tendant vers $+\infty$ (propriété des limites). Or en prenant $u_n=n.\pi$ on obtient $f(u_n)=e^{\sin(n.\pi)}=e^0=1$ qui tend vers 1, et en prenant par exemple $v_n=\dfrac{\pi}{2}+2n.\pi$ on obtient $f(v_n)=e^{\sin(\frac{\pi}{2}+2n.\pi)}=e^1=e$ qui tend vers e. La limite d'une fonction ayant une valeur unique, quand elle existe, la fonction f ne peut avoir de limite en $+\infty$;

c) Si on prend $u(x)=e^{-x}$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x_0=+\infty$, u et v tendent vers 0 alors que $u(x)^{v(x)}=e^{-1}$ est constant et tend vers e^{-1}.

Avec $u(x)=e^{-x^2}$ et le même v, on obtient $u(x)^{v(x)}=e^{-x}$ qui tend vers 0.

Avec le premier $u(x)$ et $v(x)=\dfrac{1}{x^2}$ on trouve $u(x)^{v(x)}=e^{-\frac{1}{x}}$ qui tend vers $e^0=1$.

On peut varier ces exemples à l'infini, ou en trouver d'autres (cf 2ème partie).

2ème partie :

(1) $n>1$ donc, d'après le cours, la racines k-ème de n est >1 pour tout $k\geq 1$. En particulier : $u_n=\sqrt[n]{n}>1$.

(2) On se donne un réel $\varepsilon>0$ fixé.

(a) On utilise la formule du binôme : $(1+\varepsilon)^n=1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+...+C_n^n\varepsilon^n\geq 1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2$ car les termes négligés sont positifs.

On a bien $1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2=1+n.\varepsilon+\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$

Remarque : on pouvait aussi utiliser la formule de Taylor Lagrange pour la fonction $x\mapsto x^n$ entre $a=1$ et $b=1+\varepsilon$.

(b) Si $\forall n\geq 2$, on peut écrire : $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}\Rightarrow\dfrac{n}{2}\varepsilon^2>1\Rightarrow\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2>1.(n-1)=n-1$.

(c) On prend N_0 entier tel que $N_0\geq 2$ et $N_0>\dfrac{2}{\varepsilon^2}$; soit n un entier tel que $n\geq N_0$.

D'après le (a) et le (b), puisqu'alors $n\geq 2$ et $n\geq\dfrac{2}{\varepsilon^2}$, $(1+\varepsilon)^n\geq\geq 1+n.\varepsilon+\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2>1+\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2\geq 1+(n-1)=n$.

Or $(1+\varepsilon)^n>n$ équivaut à $1+\varepsilon>\sqrt[n]{n}=u_n$, ce qu'on voulait.

(3) Soit $\varepsilon>0$. Notons, d'après le (1), qu'on a toujours $u_n>1$. D'après le (2), on peut trouver un rang N_0 tel que $n\geq N_0$ entraîne $1+\varepsilon>u_n$.

Ainsi, pour $\varepsilon>0$, on a pu trouver N_0 tel que : $n\geq N_0\Rightarrow 1+\varepsilon>u_n>1$.

La définition de la limite est statisfaite, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

(4) $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}$ est de la forme $(+\infty)^0$ comme dans les formes indéterminées étudiées en première partie. On a donc, “à la main”, levé une indétermination du même type.

A noter que, si on utilise les log et les exponentielles, $\ln(u_n)=\ln(n^{\frac{1}{n}})=(\dfrac{1}{n}).\ln(n)$, est une forme indéterminée “$0.(+\infty)$”, moins facile à estimer que celles du (2), 1ère partie, bien que ce soit une limite de référence du cours (“les puissances dominent les logarithmes”, donc la limite vaut 0 et u_n tend vers 1).

Autre remarque : on a là une suite, mais le vocabulaire utilisé dans l'énoncé ($u(x)$ définie “au voisinage de x_0”, etc.) s'applique aux suites au voisinage de $+\infty$ comme aux fonctions au voisinage d'un point, comme cela a été signalé dans le cours.

Exercice 4

On pose : $\forall n\geq 0, I_n=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{x^2+1}dx$.

(a) $I_0=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{2\times 0}}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx=[\mathrm{Arctan}(x)]_{-1}^{1}=\mathrm{Arctan}(1)-\mathrm{Arctan}(-1)=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$.

(b) $\forall x, x^2\geq 0\Rightarrow\forall x, 1+x^2\geq 1\Rightarrow\forall x,\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1$, on a donc, en notant que la fonction x^{2n} est positive, et donc la fonction intégrée et l'intégrale aussi :

$\forall n, |I_n|=|\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{x^2+1}dx|=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{x^2+1}dx\leq\int_{-1}^{1}1.x^{2n}dx=[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}]_{-1}^{1}=\frac{1-(-1)}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}$.

Comme $\dfrac{1}{2n+1}\longrightarrow 0$, on en déduit que $(I_n)_n$ tend vers 0.

(c) Fixons $n \geq 0$. On aura :

$I_{n+1} = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2(n+1)}}{x^2+1} dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{x^{2(n+1)} + x^{2n} - x^{2n}}{x^2+1} dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{x^{2(n+1)} + x^{2n}}{x^2+1} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{x^2+1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}(x^2+1)}{x^2+1} dx - I_n$

$= \int_{-1}^{1} x^{2n} dx - I_n$

$= [\frac{x^{2n+1}}{2n+1}]_{-1}^{1} - I_n$

$= \frac{2}{2n+1} - I_n$.

(d) AMORCE : D'après le (a) la formule est vraie pour $n = 0$, avec une somme vide (de $k = 1$ à $k = 0$). On peut appliquer une fois la formule du (c) (avec $n = 0$) pour obtenir le rang 1 : $I_1 = \frac{2}{2.0+1} - I_0 = 2 - \frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{1-k}}{2.k-1} + (-1)^1 \frac{\pi}{2}$, car $(-1)^1 = -1$, et pour $k = 1$ on a $\frac{(-1)^{1-1}}{2.1-1} = \frac{1}{1} = 1$.

HEREDITE : Supposons donc la formule vraie pour un rang n :

$I_n = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n-3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{2}{1} + (-1)^n \frac{\pi}{2} = 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n \frac{\pi}{2}$.

On obtient alors :

$I_{n+1} = \frac{2}{2n+1} - I_n$ (formule prouvée au (c))

$= \frac{2}{2n+1} - (2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n \frac{\pi}{2})$ (en appliquant la formule de récurrence)

$= \frac{2}{2n+1} + (2.\sum_{k=1}^{n} -[\frac{(-1)^{n-k}}{2k-1}] - (-1)^n \frac{\pi}{2})$

$= \frac{2(-1)^{(n+1)-(n+1)}}{2(n+1)-1} + (2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(n+1)-k}}{2k-1} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2})$ (car $(-1)^{(n+1)-(n+1)} = (-1)^0 = 1$ et $2(n+1)-1 = 2n+1$),

$= (2.\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(n+1)-k}}{2k-1} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2})$, ce qu'on voulait prouver, au rang $n+1$.

(e) D'après le (b), I_n tend vers 0. D'après le (d) on a :

$I_n = 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ donc :

$(-1)^n I_n = 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n(-1)^n \frac{\pi}{2} = -2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{\pi}{2}$ car $(-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^n(-1)^{n-k} = (-1)^{2n-k} = (-1)^{-k} = (-1)^{2k-k} = (-1)^k = -(-1)^{k-1}$.

Comme $|(-1)^n I_n| = I_n$ tend vers 0, cette suite tend vers 0, et :

$-2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0 \Rightarrow 2.\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$, ce qu'on voulait prouver.