Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) On pose $u(t) = \ln(t), v'(t) = 1$, ce qui peut correspondre à $u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = t$.

On a donc : $I_1 = \int_1^e \ln(t)dt = \int_1^e u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_1^e - \int_1^e u'(t)v(t)dt = [\ln(t) \times t]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times tdt = [\ln(e) \times e - \ln(1) \times 1] - \int_1^e 1dt = [1 \times e - 0 \times 1] - [t]_1^e = e - 0 - (e-1) = 1$.

b) Si on pose $t = u^2$ ou $u = \sqrt{t}$ (car $t > 0$ sur l'intervalle d'intégration). Les bornes sont $t = 1$ et $t = 4$ ce qui correspond à $u = 1, u = 2$. Par ailleurs on aura $t'(u) = 2u$. On connaît la formule :

$I_2 = \int_{t(1)}^{t(2)} \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}} = \int_1^2 \frac{t'(u)du}{t(u) + 2\sqrt{t(u)}} = \int_1^2 \frac{2udu}{u^2 + 2u} = \int_1^2 \frac{2udu}{u(u+2)} = 2\int_1^2 \frac{du}{u+2} = 2[\ln(u+2)]_1^2 = 2[\ln(4) - \ln(3)]$.

Exercice 2

On pose pour $x > 1$: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$.

a) Le dénominateur est de degré supérieur au numérateur, il n'y a donc que des éléments simples quotients, et par ailleurs ils sont de deux types : $\frac{a}{x-1}, \frac{bx+c}{x^2+1}$. On aura :

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Cette égalité découle d'une égalité entre polynômes, donc toute identité qui en découle doit être vraie pour tout x (en effet, une identité entre polynômes vraies pour $x > 1$, donc pour une infinité de x, est vraie pour tout x).

En multipliant par $x - 1$ l'identité ci dessus on obtient :

$$\frac{1}{x^2+1} = a + (x-1)\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Ceci doit rester vrai pour $x = 1$, ce qui donne :

$$\frac{1}{1^2+1} = a + (1-1)\frac{b \times 1 + c}{1^2+1},$$

soit :

$$\frac{1}{2} = a.$$

Du coup :

$$\frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1 - \frac{1}{2}(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

On a donc décomposé f :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

b) D'après le cours on connaît des primitives sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x-1}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$, qui sont $x \mapsto \ln(x-1), x \mapsto \arctan(x)$.

Quant à $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$, comme la dérivée de $x \mapsto x^2 + 1$ est $x \mapsto 2x$, elle apparaît sous la forme $\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$, ce qu'un changement de variable simple (ou la connaissance des dérivées logarithmiques) permet d'intégrer :

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u(x)).$$

La primitive voulue est donc $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

c) L'intégration est linéaire. D'après le a), $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{x^2+1}) - \frac{1}{2}(\frac{x}{x^2+1})$.
D'après le b), les primitives de f s'écrivent donc :
$\frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$, où C est une constante réelle.

Exercice 3

On se donne une fonction f, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifiant $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

Pour tout $x > 0$, on pose : $g(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt$.

1) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, [t > B \Rightarrow f(t) > A]$. On peut mettre partout $\geq$ au lieu de $>$, sans changer le sens de la définition.

2) La condition signifie que sur $[B, +\infty[$, on a $f(t) \geq A$. Si $x \geq B$, on a $[x, 2x] \subset [B, +\infty[$, et donc $\forall t \in [x, 2x], f(t) \geq A$.
D'où $\int_x^{2x} f(t)dt \geq \int_x^{2x} Adt = (2x - x)A = xA$.
On a donc bien, si $x \geq B$, $g(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt \geq \frac{1}{x}(xA) = A$.

3) Donnons nous A un réel quelconque. D'après la définition de $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, on peut trouver un B tel que, $\forall t \geq 0, [t \geq B \Rightarrow f(t) \geq A]$.
D'après le 2), on aura aussi : $\forall x \geq 0, [x \geq B \Rightarrow g(x) \geq A]$.
Ainsi la fonction g vérifie la même définition de limite que f, puisqu'on peut trouver ce B pour tout A. On a donc bien : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exercice 4

1) $u_1=\dfrac{3\times 2+7}{2+3}=\dfrac{13}{5}=2,6$, $u_2=\dfrac{3\frac{13}{5}+7}{\frac{13}{5}+3}=\dfrac{74}{28}=2,64....$

2) On a clairement : $x>0\Rightarrow \frac{3x+7}{x+3}>0$ (c'est le quotient de deux réels >0). Comme $u_0>0$, on voit par récurrence que tous les u_n sont >0.

3) Comme $u_n>0$ (question 2), le quotient servant à calculer v_n a un dénominateur >0 et v_n est bien défini.

4) On utilise la formule de récurrence servant à calculer u_n.

Montrer qu'on a pour tout n : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{7}}{u_{n+1}+\sqrt{7}}=\dfrac{\frac{3u_n+7}{u_n+3}-\sqrt{7}}{\frac{3u_n+7}{u_n+3}+\sqrt{7}}=\dfrac{(3-\sqrt{7})u_n+7-3\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})u_n+7+3\sqrt{7}}=$
$\dfrac{(3-\sqrt{7})u_n+(\sqrt{7}-3)\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})u_n+(\sqrt{7}+3)\sqrt{7}}\dfrac{(3-\sqrt{7})(u_n-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(u_n+\sqrt{7})}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}v_n.$

5) $(v_n)_n$ est géométrique de raison a d'après le 4). Donc $v_n=a^nv_0=a^n\dfrac{2-\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}$.

Comme $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{7}}{u_n+\sqrt{7}}$, on a : $v_n(u_n+\sqrt{7})=u_n-\sqrt{7}$, donc :
$u_n(v_n-1)=-\sqrt{7}-\sqrt{7}v_n$, et finalement :
$u_n=\sqrt{7}\dfrac{1+v_n}{1-v_n}=\sqrt{7}\dfrac{1+a^n\frac{2-\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}}{1-a^n\frac{2-\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}}$.

6) On a $4<7<9\Rightarrow 2<\sqrt{7}<3\Rightarrow 0<3-\sqrt{7}<1<3+\sqrt{7}$ donc $0<a<1$. Ainsi la suite $(v_n)_n$ qui est géométrique de raison a, tend vers 0. Comme $u_n=\sqrt{7}\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$ d'après le 5), la suite $(u_n)_n$ tend vers $\sqrt{7}\dfrac{1+0}{1-0}=\sqrt{7}$.

7) On a déjà vu que $a>0$. Par ailleurs $a=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$. Or on a $0<3-\sqrt{7}<\dfrac{1}{2}$ car ceci s'écrit $5=6-1<2\sqrt{7}$ ou encore $25<4\times 7=28$, ce qui est vrai.

Par ailleurs $3+\sqrt{7}>3+2=5$, donc en fin de compte $a<\dfrac{\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{1}{10}$.

On pouvait aussi écrire : $a=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})^2}=\dfrac{3^2-\sqrt{7}^2}{(3+\sqrt{7})^2}=\dfrac{2}{(3+\sqrt{7})^2}<\dfrac{2}{5^2}=\dfrac{2}{25}<\dfrac{1}{10}$.

Par ailleurs $v_0=\dfrac{2-\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}}<0$ car $2<\sqrt{7}$. On a : $-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}<v_0\iff\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}<\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\iff 2\sqrt{7}(\sqrt{7}-2)<\sqrt{7}+2\iff 14-4\sqrt{7}<\sqrt{7}+2\iff 12<5\sqrt{7}\iff 144=12^2<25\times 7=175$, ce qui est vrai.

8) D'après les calculs du 5) : $\sqrt{7}-u_n=\sqrt{7}-\sqrt{7}\dfrac{1+v_n}{1-v_n}=\sqrt{7}\dfrac{(1-v_n)-(1+v_n)}{1-v_n}=-2\sqrt{7}\dfrac{v_n}{1-v_n}$.

D'après le 5), $v_n=a^nv_0$ avec $0<a<1$ et $v_0<0$, donc $v_n<0$.

On a par ailleurs $-\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\dfrac{1}{10^n}<v_n<0$ d'après le 6). Le signe de v_n prouve que $1+v_n>1$. Finalement on obtient :
$-2\sqrt{7}\dfrac{v_n}{1-v_n}<-2\sqrt{7}\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{7}}\frac{1}{10^n}}{1}=\dfrac{1}{10^n}$.

Ceci s'écrit : $0<\sqrt{7}-u_n<\frac{1}{10^n}$, donc $u_n<\sqrt{7}<u_n+10^{-n}$. On a notamment : $u_2<\sqrt{7}<u_2+10^{-2}$.
Autrement dit $2,64...<\sqrt{7}<2,64...+0,01$.

On peut donc affirmer que $2,65$ approche $\sqrt{7}$ a moins de $0,01$ près. En fait, en affinant l'approximation, on pourrait voir que les deux premiers chiffres après la virgule de $\sqrt{7}$ sont bien $2,64$.

Exercice 5

1) Si $x \in A$, on peut écrire $x = \ln(n) - \ln(m) = \ln(\dfrac{n}{m})$ avec $n - em < 0$ donc $\dfrac{n}{m} < e$, et $x = \ln(\dfrac{n}{m}) < \ln(e) = 1$. Ceci prouve que tout $x \in A$ est inférieur à 1, donc que 1 majore A.

2) a) Comme $1 - \varepsilon < 1$, on a $e^{1-\varepsilon} < e$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il y a un rationnel entre $e^{1-\varepsilon}$ et e. Un tel rationnel est forcément positif, on peut donc effectivement trouver un couple (n, m) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$e^{1-\varepsilon} < \frac{n}{m} < e.$$

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver (n, m) tels que : $e^{1-\varepsilon} < \dfrac{n}{m} < e$.

On aura donc $n - em < 0$, donc le réel $x = \ln(n) - \ln(m)$ est dans A. Or on a :
$e^{1-\varepsilon} < \dfrac{n}{m} \Rightarrow 1 - \varepsilon < \ln(\dfrac{n}{m}) = \ln(n) - \ln(m) = x$.

Ainsi on a montré comment trouver $x \in A$ tel que $x > 1 - \varepsilon$. Cela veut dire que 1 est bien le plus petit majorant de A, donc sa borne supérieure.

3) Pour tout $m \geq 1$, on a $1 - em < 0$ donc $x_m = \ln(1) - \ln(m) = -\ln(m) \in A$. Comme $\lim\limits_{m \to +\infty} [-\ln(m)] = -\infty$, ceci prouve que A n'est pas minorée (si b est un réel, par définition de la limite on peut trouver m tel que $x = -\ln(m) < b$, donc b ne minore pas A).

Exercice 6

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x > 0$, on pose $u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln(x)$.

Dans les questions 1),2), 3) et 4), on fixe l'entier n et on considère la fonction définie par : $\forall x > 1, f(x) = \sqrt[n]{x}$.

1) $u_n(1) = n(\sqrt[n]{1} - 1) - \ln(1) = n \times 0 - 0 = 0$. Et $f(1) = \sqrt[n]{1} = 1$.

2) $f'(x) = [x^{\frac{1}{n}}]' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$. Et $u_n'(x) = n[\sqrt[n]{x} - 1]' - \ln'(x) = n\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} - \frac{1}{x}$.

3) a) D'après le 2), $f'(x) \geq 0$, et comme $1 - \dfrac{1}{n} \geq 1 - 1 = 0$, on a $x \geq 1 \Rightarrow x^{1-\frac{1}{n}} \geq 1$, d'où $f'(x) = \dfrac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} \leq \dfrac{1}{n}$.

b) On utilise le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]1, x[$, tel que : $f(x) - f(1) = f'(c)(x-1)$. D'après le a), $0 \leq f'(c) \leq \dfrac{1}{n}$, donc : $0 \leq f(x) - f(1) \leq \dfrac{1}{n}(x - 1)$.

4) a) D'après le 2), $u_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \dfrac{1}{x}(f(x) - 1)$. En utilisant les deux encadrements : $0 \leq f(x) - f(1) \leq \dfrac{1}{n}(x - 1)$, et $0 \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$, on obtient bien : $0 \leq u_n'(x) \leq \dfrac{1}{n}(x - 1)$.

b) On intègre l'inégalité précédente : si $x \geq 1$, $0 = \displaystyle\int_1^x 0dt \leq u_n(x) - u_n(1) = \int_1^x u_n'(t)dt \leq \frac{1}{n}\int_1^x (t-1)dt = \frac{1}{2n}(x-1)^2$. Comme $u_n(1) = 0$, on obtient l'inégalité voulue (ce résultat peut être obtenu en utilisant le théorème des accroissements finis).

5) Pour x fixé, l'inégalité $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{2n}(x - 1)^2$ donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = 0$ (théorème des gendarmes).

Comme $u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln(x)$ tend vers 0, on obtient bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$.

6) Pour $x \in]0, 1[$, posons $y = \dfrac{1}{x}$.

On a alors $u_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln(x) = n(\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} - 1) - \ln(\dfrac{1}{y}) = n(\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} - 1) + \ln(y) = \sqrt[n]{\dfrac{1}{y}}[n(1 - \sqrt[n]{y}) + \ln(y)] + (1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{y}})\ln(y) = -\sqrt[n]{\dfrac{1}{y}} u_n(y) + (1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{y}})\ln(y)$.

D'après le 5), $u_n(y)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

D'après le 4), $0 \leq \sqrt[n]{y} - 1 \leq \frac{1}{n}(y - 1)$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{y} = 1$.

Finalement la limite de $u_n(x)$ est $1 \times 0 + (1 - \frac{1}{1}) \times \ln(y) = 0$. C'est comme dans le cas où $x \geq 1$, donc on a encore : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$.