Terminal - mai 2010

<u>EXERCICE 1 :</u> On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan(x)}{\cos^2(x)+3}dx$.

(a) La fonction intégrée est bien définie sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et on peut y écrire : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Posons $t = \cos(x)$. Alors on a "$-\sin(x)dx = dt$" et, quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{3}$, t varie de $\cos(0) = 1$ à $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. On peut donc écrire, en utilisant la formule du changement de variable :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\tan(x)}{\cos^2(x)+3}dx,\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin(x)}{\cos(x)(\cos^2(x)+3)}dx,\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{3(-\sin(x)dx)}{\cos(x)(\cos^2(x)+3)},\\
&= \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{3})} -\frac{3dt}{t(t^2+3)},\\
&= \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{3}{t(t^2+3)}dt,\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3dt}{t(t^2+3)}dt, \text{ en inversant les deux bornes et le signe.}
\end{aligned}$$

(b) D'après le cours, la décomposition en éléments simples s'écrit sous la forme :

$\frac{3}{t(t^2+3)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+3}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

De plus, toujours d'après le cours, on a :

$a = (\frac{3}{t^2+3})_{t=0} = \frac{3}{0^2+3} = 1.$

Ce qui donne : $\frac{bt+c}{t^2+3} = \frac{3}{t(t^2+3)} - \frac{1}{t} = \frac{3-(t^2+3)}{t(t^2+3)} = \frac{-t^2}{t(t^2+3)} = \frac{-t}{t^2+3}$.

On a donc la décomposition :

$\frac{3}{t(t^2+3)} = \frac{1}{t} + \frac{-t}{t^2+3}$, (c'est-à-dire $a = 1, b = -1, c = 0$).

(c) D'après les questions (a) et (b) :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3dt}{t(t^2+3)}dt\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{t} + \frac{-t}{t^2+3})dt\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-t}{t^2+3}dt, \text{ par linéarité de l'intégration,}\\
&= [\ln(t)]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}.\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t}{t^2+3}dt,\\
&= [\ln(1) - \ln[\frac{1}{2}]] - \frac{1}{2}.\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u'(t)}{u(t)}dt, \text{ en posant } u(t) = t^2+3,\\
&= [0 + \ln(2)] - \frac{1}{2}.[\ln(1^2+3) - \ln[(\frac{1}{2})^2+3], \text{ car } \frac{u'(t)}{u(t)} \text{ est la dérivée de : } t \mapsto \ln[u(t)],\\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}.[\ln(4) - \ln(\frac{13}{4})],\\
&= \frac{1}{2}.\ln(\frac{13}{4}), \text{ car } \ln(4) = 2.\ln(2).
\end{aligned}$$

<u>EXERCICE 2 :</u> On pose $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$.

(a) Une expression du type u^v est définie si et seulement si : $u > 0$.

Le domaine de définition est donc l'ensemble des x tels que : $1+\dfrac{1}{x}>0$ ce qui donne :

$1+\dfrac{1}{x}>0 \iff \dfrac{x+1}{x}>0 \iff (x>0 \text{ ou } x<-1)$.

En effet x et $x+1$ sont de même signe quand ils sont tous deux positifs (ce qui donne $x>0$) ou négatifs (ce qui donne $x+1<0 \iff x<-1$).

On a donc : $D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ $(A=-1, B=0)$.

(b) On peut écrire, pour $x \in D_f$: $f(x)=e^{\ln(1+\frac{1}{x}).x}$ d'où (dérivée d'une composée) :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [\ln(1+\frac{1}{x}).x]'exp'[\ln(1+\frac{1}{x}).x],\\
&= [\ln(1+\frac{1}{x}).1+\frac{(1+\frac{1}{x})'}{1+\frac{1}{x}}.x].exp[\ln(\frac{x+1}{x}).x],\\
&= [\ln(1+\frac{1}{x}).1+\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}.x].(1+\frac{1}{x})^x,\\
&= [\ln(\frac{x+1}{x})-\frac{1}{x+x\frac{1}{x}}].f(x),\\
&= [\ln(\frac{x+1}{x})-\frac{1+x-x}{x+1}].f(x),\\
&= [\ln(\frac{x+1}{x})-\frac{1+x}{x+1}+\frac{x}{x+1}].f(x),\\
&= [\ln(\frac{x+1}{x})+\frac{x}{x+1}-1].f(x),\\
&= v(\frac{x+1}{x})f(x), \text{ avec } v(t)=\ln(t)+\frac{1}{t}-1.
\end{aligned}$$

(c) $v(t)=\ln(t)+\frac{1}{t}-1$ est défini si $t>0$ c'est-à-dire sur $D_v=\mathbb{R}_+^*$, à cause du log et de l'inverse.

On a, sur D_v, $v'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$ qui est du signe de $t-1$ c'est-à-dire négatif sur $]0,1]$, positif sur $[1,+\infty[$. Ceci prouve que v est décroissante, passe par un minimum en $t=1$ égal à $v(1)=\ln(1)+1/1-1=0+1-1=0$, et est croissante après.

On a donc : $\forall t \in D_v, v(t)\geq 0$ (avec égalité ssi $t=1$).

Remarque : d'après le (a) le réel $\frac{x+1}{x}=t$ est dans D_v exactement quand x est dans D_f, ce qui confirme la formule du (b).

(d) D'après le (b), pour tout $x\in D_f$, on a $f'(x)=v(t)f(x)$ avec $t=\dfrac{x+1}{x}$.

D'après l'étude du (c), on aura toujours $v(t)\geq 0$, et comme $f(x)>0$, on en déduit que : $\forall x\in D_f, f'(x)\geq 0$.

Ainsi, f est croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]0,+\infty[$. Reste à déterminer les limites aux bornes : $-\infty, -1, 0, +\infty$.

En $\pm\infty$: le réel $1/x$ tend vers 0 quand $|x|\longrightarrow+\infty$, donc on soit pouvoir utiliser le DL donné dans l'énoncé ;

$\ln(1+u)=u+u.\varepsilon(u)$ devient :

$\ln(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}.\alpha(x)$ avec $\alpha(x)=\varepsilon(\dfrac{1}{x})$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$.

On a donc $\ln(f(x))=x.\ln(1+\dfrac{1}{x})=x[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}.\alpha(x)]=1+\alpha(x)$, d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln[f(x)]=1$ et finalement $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=e$.

En -1 : $1+1/x$ tend vers $1-1=0$ en restant positif, donc $\ln(1+\dfrac{1}{x})$ tend vers $-\infty$, et $\ln[f(x)]=x.\ln(1+\dfrac{1}{x})$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$.

En 0 : $\ln[f(x)]=x\ln(1+\dfrac{1}{x})=x.\ln(\dfrac{x+1}{x})=x.[\ln(x+1)-\ln(x)]=x.\ln(x+1)-x.\ln(x)$.

Quand $x\longrightarrow 0^+$, $x.\ln(x+1)\to 0.\ln(1)=0$ n'est pas indéterminée, et $\lim\limits_{x\to0^+}x.\ln(x)$ est une limite de référence qui vaut 0.

Au bilan, $\ln[f(x)]$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

Ceci permet de tracer le graphe.

EXERCICE 3 :

(a)

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_1^e \ln(t)dt.\\
&= \int_1^e u'(t)v(t)dt, \text{ en posant } u'(t)=1, u(t)=t, v(t)=\ln(t), v'(t)=1/t,
\end{aligned}$$

$= [u(t)v(t)]_1^e - \int_1^e u(t)v'(t)dt$, d'après la formule des intégrations par parties,
$= [t.\ln(t)]_1^e - \int_1^e t\frac{1}{t}dt$,
$= [e.\ln(e) - 1.\ln(1)] - \int_1^e dt$,
$= [e-0] - [e-1]$,
$= 1$.
(b)
$J_2 = \int_1^e \ln^2(t)dt$
$= \int_1^e u'(t)v(t)dt$, en posant $u'(t) = 1, u(t) = t, v(t) = \ln^2(t), v'(t) = 2(1/t)\ln(t)$,
$= [t\ln^2(t)]_1^e - \int_1^e 2t(1/t)\ln(t)dt$, d'après la formule des intégrations par parties,
$= [e.1^2 - 1.0^2] - 2\int_1^e \ln(t)dt$,
$= e - 2J_1 = e - 2$, en utilisant le (a).
(c)
$J_{n+1} = \int_1^e \ln^{n+1}(t)dt$
$= \int_1^e u'(t)v(t)dt$, en posant $u'(t) = 1, u(t) = t, v(t) = \ln^{n+1}(t), v'(t) = (n+1)(1/t)\ln^n(t)$,
$= [t\ln^{n+1}(t)]_1^e - \int_1^e (n+1)t(1/t)\ln^n(t)dt$, d'après la formule des intégrations par parties,
$= [e.1^{n+1} - 1.0^{n+1}] - (n+1)\int_1^e \ln^n(t)dt$,
$= e - (n+1)J_n$, comme désiré.

EXERCICE 4 :

(A) On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et on fait l'hypothèse que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \in [0,1[.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang N_0 tel que : $\forall n \geq N_0, x_{n+1} \leq k.x_n$.

(b) Prouver la majoration suivante : $\forall n \geq N_0, 0 < x_n \leq \frac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.

(c) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(B) Applications : On fixe un paramètre réel strictement positif $R > 0$, et on pose pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 R^n}.$$

(a) Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (et bien sûr de R), le rapport : $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, et en déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que si on a pris une valeur de R telle que : $R > 4$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(c) Montrer que si $0 < R < 4$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.