CORRIGÉ DU TERMINAL D'ANALYSE - 25 MAI 2009

CORRIGÉ DE L'EXAMEN POUR LES ÉTUDIANTS DE LA VOIE MATH

Exercice (voie Math) :

(1) $F(x) = \int Arctan(x)dx$

$= \int Arctan(x) \times 1dx$, où on peut poser $u(x) = Arctan(x), u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et $v'(x) = 1, v(x) = x$.

$= x.Arctan(x) - \int \frac{1}{1+x^2} xdx$, d'après la formule d'intégration par partie,

$= x.Arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{w'(x)}{w(x)}dx$, en posant $w(x) = 1 + x^2, w'(x) = 2x$,

$= x.Arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C^{\text{te}}$, qui est la primitive voulue.

(2) $I = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}dx.$

On commence par décomposer en élément simple la fraction rationnelle $R(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}$.

D'après le cours et comme le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur $(2 < 3)$, la décomposition s'écrit :

$\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ $(*)$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Multiplions les deux membres de $(*)$ par $(x + 1)$, il vient :

$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = a + (x + 1)(\frac{bx + c}{x^2 + 1})$ $(**)$.

Cette dernière égalité étant vraie pour tout $x \neq -1$, elle l'est aussi pour $x = -1$, d'après le cours sur les fractions rationnelles et les polynômes (une égalité entre polynômes vraie pour tout x sauf quelques-uns est vraie pour tout x).

Faisons donc $x = -1$ dans $(**)$, il vient :

$\frac{(-1)^2 + (-1) + 1}{(-1)^2 + 1} = a + ((-1) + 1)\frac{b(-1) + c}{(-1)^2 + 1}) \iff \frac{-1 + 1 + 1}{1 + 1} = a + 0 \iff a = \frac{1}{2}$.

En reportant ceci dans $(*)$, on obtient :

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} - \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x + 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1}.$$

On a donc $b = c(= a) = 1/2$.

On peut passer au calcul de I :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1}dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x + 1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}dx.$$

On sait calculer ces intégrales :

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x}dx = [\ln(1 + x)]_0^1 = \ln(1 + 1) - \ln(1 + 0) = \ln(2).$$

$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}[\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)] = \frac{1}{2}\ln(2)$ (primitive déjà calculée au (1)).
$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [Arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.
On a donc $I = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln(2)) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}\ln(2) + \frac{\pi}{8}$.

PROBLÈME 1 (voie Math)

(1) Théorème du cours : l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$, autrement dit elle atteint un minimum $m = f(c_1)$ et un maximum $f(c_2)$. Comme la fonction f est dérivable, elle est continue, et comme on nous dit qu'elle est C^1, cela veut dire que f' aussi est continue, et on peut appliquer le théorème susmentionné à f et à f'.

(2) $\min\{|f'(x)| \text{ où } x \in [a, b]\} \geq 0$ puisqu'une valeur absolue est positive. Si $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle prouve qu'il y a c tel que $f'(c) = 0$, donc $|f'(c)| = 0$, valeur minimale possible. On a donc $\min\{|f'(x)| \text{ où } x \in [a, b]\} = 0$.

(3) $f'(x)$ prend toutes les valeurs d'un intervalle fermé borné $[m, M]$ d'après le (1). Cet intervalle contient 0 d'après les raisonnements du (2), donc $m \leq 0 \leq M$, et $|f'(x)|$ est au maximum égal à $|m|$ ou $|M|$, en tout cas est majoré. Ainsi sur $]a, b[$ (qui est inclus dans $[a, b]$), $|f'(x)|$ est majoré, donc l'ensemble des valeurs prises par $|f'(x)|$ est majoré et non vide : par le théorème (ou axiome, ou postulat, suivant les approches) de la borne supérieure, cet ensemble a une borne supérieure.

Autre raisonnement possible : la fonction valeur absolue est continue, f' aussi, finalement $x \mapsto |f'(x)|$ est continue et, d'après le théorème déjà cité au (1), cette fonction atteint un maximum sur $[a, b]$. Elle est donc majorée sur $]a, b[$ et on peut conclure comme précédemment que $\{|f'(x)| \text{ où } x \in [a, b]\}$, ensemble non vide et majoré, admet une borne supérieure.

(4) La formule de Taylor-Lagrange ennonce qu'on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que :

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(c)}{2}(b-a)^2$$

Ce qui s'écrit en remarquant que $F' = f, F'' = f'$:

$$F(b) = F(a) + f(a)(b-a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2$$

(5) L'égalité trouvée au (4) devient :

$$F(b) = F(a) + 0(b-a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2 = F(a) + \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2.$$

Donc : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \frac{f'(c)}{2}(b-a)^2$, et :

$$|\int_a^b f(t)dt| = \frac{|f'(c)|}{2}(b-a)^2 \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2.$$

PROBLÈME 2 (voie Math)

(1) (a) On a la composition de la bijection croissante ln de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et de $X \mapsto 1/X$, bijection décroissante de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Par propriété des composées, g est une bijection décroissante de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Si $t = g^{(-1)}(x)$ vérifie $g'(t) \neq 0$, on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{1}{g'[g^{(-1)}(x)]}$.

Dans le cas qui nous occupe, $\forall t > 1, g'(t) = [\frac{1}{\ln(t)}]' = -\frac{\frac{1}{t}}{\ln^2(t)} = -\frac{1}{t.\ln^2(t)} < 0$, car $\ln(t) > 0$ et $t > 1$ sur $]1, +\infty[$.

Donc pour tout $x > 0$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{-\frac{1}{t.\ln^2(t)}}$ avec $t = g^{(-1)}(x)$.

Ainsi $(g^{-1})'(x) = -t.\ln^2(t) = -g^{(-1)}(x)\ln^2(g^{(-1)}(x))$. On peut se contenter de cela (pas très maniable !).

Cela dit si on remarque que pour un tel couple (x, t), on a : $\frac{1}{\ln(t)} = g(t) = x$, on peut écrire :

$$(g^{-1})'(x) = -t.\ln^2(t) = -t\frac{1}{(\frac{1}{\ln(t)})^2} = -\frac{t}{x^2} = -\frac{g^{(-1)}(x)}{x^2}.$$

Remarque : en fait on calcule facilement l'expression de $g^{(-1)}$:

$$x = g(t) \iff x = \frac{1}{\ln(t)} \iff \ln(t) = \frac{1}{x} \iff t = e^{\frac{1}{x}}.$$

Avec cette expression : $g^{(-1)}(x) = e^{\frac{1}{x}}$, on retrouvait par exemple : $(g^{(-1)})'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{g^{(-1)}(x)}{x^2}$ (les formules du cours sont donc vérifiées, ouf !).

(2)(a) D'après (1)(a) la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est décroissante, elle prend donc sa valeur mininale sur $[x, x^2]$ en $t = x^2$ et ce minimum est $g(x^2) = \frac{1}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln(x)}$: cette valeur est le plus petit élément cherché.

(b) On peut utiliser le (a) pour minorer l'intégrale qui définit $f(x)$:

$$\begin{aligned}\forall x > 1, f(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt\\ &\geq \int_x^{x^2} \frac{1}{2}.\frac{1}{\ln(x)}dt, \text{ d'après le (a),}\\ &= [\frac{1}{2}.\frac{1}{\ln(x)}](x^2 - x)\\ &= \frac{x-1}{2}.\frac{x}{\ln(x)}.\end{aligned}$$

Si $x \geq 3$, on aura $\frac{x-1}{2} \geq \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, donc on peut effectivement en déduire : $f(x) \geq \frac{x}{\ln(x)}$.

(c) On sait par le cours que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$. Comme on peut, à partir de $x = 3$, minorer $f(x)$ par $\frac{x}{\ln(x)}$, on a aussi (théorèmes sur les limites) :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(3) (a) $\frac{\frac{1}{t}}{\ln t} = \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = \ln(t)$, définie et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Une primitive de cette fonction est donc $\ln[|u(t)|] = \ln[\ln(t)]$.

Pour obtenir la formule voulue pour f, écrivons si $t > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(t)} &= \frac{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}}{\ln(t)}\\ &= \frac{1-\frac{1}{t}}{\ln(t)} + \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\\ &= \frac{t-1}{t\ln(t)} + [\ln(\ln(t))]', \text{ en multipliant le premier quotient par } t \text{ en haut et en bas,}\\ &\qquad \text{et en utilisant la primitive qu'on vient de calculer,}\end{aligned}$$

En intégrant ceci il vient, pour $x > 1$:

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt = [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}dt.$$

Si on remarque que :

$[\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2)$,

et ce quel que soit x, on a l'égalité demandée.

(b) La limite se présente sous la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" puisque $t - 1 \longrightarrow 1 - 1 = 0$ et $\ln(t) \longrightarrow \ln(1) = 0$ quand $t \longrightarrow 1$.

Solution 1 : On peut remarquer que $\frac{t-1}{t\ln(t)} = \frac{1}{[\frac{\ln(t)}{t-1}]} \times \frac{1}{t}$.

L'expression entre crochet est le taux d'accroissement de ln entre t et 1 (car $\ln(t) = \ln(t) - \ln(1)$, puisque $\ln(1) = 0$).

Elle donc tend vers $\ln'(1) = 1/1 = 1$ quand t tend vers 1, et par conséquent le tout tend vers $\frac{1}{1}.\frac{1}{1} = 1$.

Solution 2 : Avec l'indication, si $u = t - 1$ est la nouvelle variable, qui tend vers 0 quand $t \longrightarrow 1$, on a $\ln(t) = \ln(1 + u) = u + u\alpha(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \alpha(u) = 0$, et $t = 1 + u$.

Ainsi $\frac{t-1}{t\ln(t)} = \frac{u}{(1+u)\ln(1+u)} = \frac{u}{(1+u)(u+u\alpha(u))} = \frac{1}{(1+u)(1+\alpha(u))}$, expression dans laquelle la limite quand $t \longrightarrow 0$ ou $u \longrightarrow 1$ n'est plus une forme indéterminée : elle vaut $\frac{1}{(1+0)(1+0)} = 1$.

(c) Posons $\forall t > 1, \lambda(t) = \dfrac{t-1}{t\ln(t)}$, et soit Λ une primitive de λ. On nous demande de prouver que, pour $x > 1$ fixé, il existe $c \in]x, x^2[$ tel que $\Lambda(x^2) - \Lambda(x) = (x^2 - x)\lambda(c)$. Comme $\Lambda' = \lambda$, il s'agit juste du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction Λ entre x et x^2.

(d) Le c trouvé au (c) dépend de x. Si on le note $c(x)$, on peut dire que $x < c(x) < x^2$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{x\to 1} c(x) = 1$. On peut donc composer les limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} c(x) = 1 \\ \lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u-1}{u\ln(u)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{c(x)-1}{c(x)\ln(c(x))} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1} (x^2 - x)\frac{c(x)-1}{c(x)\ln(c(x))} = (1^2 - 1) \times 1 = 0$$

Si on fait le bilan dans l'égalité du (a), on obtient, pour $x > 1$, d'après (c) :

$$f(x) = \ln(2) + (x^2 - x)\frac{c(x)-1}{c(x)\ln(c(x))}.$$

D'où finalement : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(2) + 0 = \ln(2)$.

(4) On a juste $f(x) = H(x^2) - H(x)$, par définition des intégrales. Donc :

$$f'(x) = (H(x^2))' - H(x)' = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

(5) D'après le (4) sur $]1, +\infty[$ la dérivée est positive, donc f est strictement croissante, de la valeur $\ln(2)$ (jamais atteinte, c'est la limite en 1), jusqu'à la limite $+\infty$. Voilà voilà...

CORRIGÉ DE L'EXAMEN POUR LES ÉTUDIANTS DE LA VOIE PMM

Exercice (voie PMM) :

(1) Cf la première question de la partie maths.

(2) On pose $\varphi(u) = u^4$, $u(t) = \cos(t)$. On aura donc d'après la formule du changement de variable :

$$\int_0^\pi \varphi(u(t))u'(t)dt = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \varphi(x)dx.$$

Comme $u'(t) = -\sin(t)$, on en tire :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos^4(t)\sin(t)dt \\ &= \int_0^\pi \varphi(u(t))(-u'(t))dt \\ &= -\int_{u(0)}^{u(\pi)} \varphi(x)dx \\ &= -\int_1^{-1} x^4 dx \\ &= \int_{-1}^1 x^4 dx = [\frac{x^5}{5}]_{-1}^1 = \frac{1}{5} - \frac{(-1)}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

PROBLÈME (voie PMM) : A propos d'une fonction biscornue.

(1) L'expression $e^{x-\tan^2(x)}$ est définie et continue quand la tangente l'est, c'est-à-dire en tout x différent de $\dfrac{\pi}{2} + n.\pi$. En ces points la tangente tend vers $+\infty$ pour $x < \dfrac{\pi}{2} + n.\pi$, et vers $-\infty$ pour $x < \dfrac{\pi}{2} + n.\pi$. Donc $\tan^2(x)$ tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que $e^{-\tan^2(x)}$ tend vers $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u} = 0$. Donc $f(x) = e^x e^{-\tan^2(x)}$ tend vers $e^{\frac{\pi}{2}+n.\pi}.0 = 0$ en ces points, et c'est justement la valeur choisie pour f ($f(x) = 0$ quand l'expression avec la tangente n'est pas définie).

(2) (i) Pour tout x, $f(x)$ est une exponentielle ou 0, donc $f(x) \geq 0$. Par ailleurs si $f(x) = 0$ on a bien $f(x) = 0 < e^x$, et si $f(x) = e^{x-\tan^2(x)}$ alors :

$$f(x) = e^x e^{-\tan^2(x)} \leq e^x,$$

car $u \geq 0 \Rightarrow e^{-u} \leq e^0 = 1$, l'exponentielle étant croissante.

Les inégalités voulues sont donc toujours vraies.

(ii) Comme $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$, le (i) et le théorème des gendarmes prouvent que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(3) (i) La tangente est définie et vaut 0 en $n\pi$, donc $f(n.\pi) = e^{n.\pi - \tan^2(n.\pi)} = e^{n.\pi - 0^2} = e^{n.\pi}$.

(ii) Comme $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\pi = +\infty$, les théorèmes du cours permettant de composer limites des fonctions et limites des suites prouvent que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n\pi) = +\infty.$$

(iii) On pose $v_n = n.\pi$, les deux questions précédentes montrent que (v_n) tend vers $+\infty$ et $f(v_n) \longrightarrow_{n\to\infty} +\infty$.

Il suffit alors de poser $u_n = \dfrac{\pi}{2} + n.\pi$ pour avoir une suite tendant vers $+\infty$ telle que $\forall n, f(u_n) = 0$: ainsi la suite $(f(u_n))_n$ est constante et nulle, donc tend bien vers 0.

(iv) D'après le cours, $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$, puisqu'on peut trouver $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ tendant vers $+\infty$, telles que $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ aient des compoertements différents.

(4) (i) Dérivée d'une composée, puisque d'après le (1) l'ensemble A est exactement l'ensemble des x tels que $f(x) = e^{x-\tan^2(x)}$.

Ainsi : $f'(x) = [e^{x-\tan^2(x)}]' = [exp(x - \tan^2(x))]'$, en notant $e^u = exp(u)$,
$= [x - \tan^2(x)]'[exp'](x - \tan^2(x))$, en appliquant la formule de dérivation d'une composée,
$= [1 - 2\tan(x)\tan'(x)][exp](x - \tan^2(x))$, car $exp' = exp$,
$= [1 - 2\tan(x)(1 + \tan^2(x))][exp](x - \tan^2(x))$, car $\tan' = 1 + \tan^2$,
$= (1 - 2(\tan(x) + \tan^3(x)))e^{x-\tan^2(x)} = (1 - 2(\tan(x) + \tan^3(x)))f(x)$.

(ii) La fonction $D : x \mapsto 1 - 2(\tan(x) + \tan^3(x))$, est définie quand $\tan(x)$ est définie, donc quand x ne s'écrit pas $\dfrac{\pi}{2} + n.\pi$, donc quand $x \in A$.

Par ailleurs sur A on a vu au (i) que $f'(x) = D(x).f(x)$. Sur A, $f(x)$ est une exponentielle donc toujours strictement positive, donc $f'(x)$ et $D(x)$ sont de même signe, et $f'(x) = 0$ si et seulement si $D(x) = 0$.

(iii) Sur $I_0 =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est strictement croissante. Par ailleurs $t \mapsto t^3$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \mapsto -\tan(x)$ et $x \mapsto -\tan^3(x)$ sont strictement décroissantes sur I_0, donc $D(x) = 1 - 2\tan(x) - 2\tan^3(x)$ aussi.

Par ailleurs la fonction tan est $\pi-$périodique, et comme $D(x)$ s'exprime entièrement en fonction de $\tan(x)$, D est $\pi-$périodique.

(iv) $\tan(0) = 0$ donc $D(0) = 1 - 2(0 + 0^3) = 1$. $\tan(\dfrac{\pi}{4}) = 1$ donc $D(\dfrac{\pi}{4}) = 1 - 2(1 + 1^3) = 1 - 4 = -3$.

D étant continue, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires et il y a un $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{4}[$ tel que $D(\alpha) = 0$.

Comme D est strictement décroissante sur I_0 (cf (iii)), on a :
$-\dfrac{\pi}{2} < x < \alpha \Rightarrow D(x) > 0$, et :$\alpha < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow D(x) < 0$.

D'après le (iii) et la périodicité, $D(x) > 0$ sur $]-\dfrac{\pi}{2} + n.\pi, \alpha[$, et $D(x) < 0$ sur $]\alpha + n.\pi, \dfrac{\pi}{2} + n.\pi[$.

D'après le (ii), le signe de f' est le même que celui de D. On peut en déduire les variations de f : elle est croissante strictement $[-\dfrac{\pi}{2} + n.\pi, \alpha]$, et décroissante strictement sur $[\alpha + n.\pi, \dfrac{\pi}{2} + n.\pi]$.

Elle a donc un maximum local strict $\alpha + n\pi$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

(v) D'après le raisonnement du (iv) et la continuité de f (question (1)), $f(x)$ croît strictement sur I_n de la valeur 0 à $f(\alpha + n.\pi)$, puis décroît jusqueà la valeur 0. Les extremas locaux sont donc tous les points $\alpha + n.\pi$ où elle a les maxima étudiés au (iv), et aussi les points $\dfrac{\pi}{2} + n.\pi$ où f présente un minimum.

La courbe de f est donc constituée d'une série de bosses, toutes de largeurs π, débutant à la hauteur $y = 0$, et allant jusqu'à une hauteur $f(\alpha + n.\pi)$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.

(vi) La beauté d'un graphe est trop subtile pour être rendue sur ordinateur...

(5)

(i) On peut connaître ou recalculer :
$\cos(h + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\dfrac{\pi}{2})\cos(h) - \sin(\dfrac{\pi}{2})\sin(h) = 0\cos(h) - 1\sin(h) = -\sin(h)$, et :
$\sin(h + \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\dfrac{\pi}{2})\sin(h) + \sin(\dfrac{\pi}{2})\cos(h) = 0\sin(h) + 1\cos(h) = \cos(h)$.

Du coup on aura $\tan(h + \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\sin(h + \frac{\pi}{2})}{\cos(h + \frac{\pi}{2})} = \dfrac{\cos(h)}{-\sin(h)} = -\dfrac{1}{\tan(h)}$ quand les deux sont définis, donc quand $\tan(h)$ est défini et non nul (ce qui correspond à des sinus et cosinus non nuls pour h **et** pour $h + \dfrac{\pi}{2}$).

Ici $0 < |h| < \dfrac{\pi}{2} \iff \left(h \in]-\dfrac{\pi}{2}, 0[\text{ ou } h \in]0, \dfrac{\pi}{2}[\right)$; donc $\tan(h)$ est défini et non nul, et on a bien $\tan^2(\dfrac{\pi}{2}+h) = \dfrac{1}{(-\tan(h))^2} = \dfrac{1}{\tan^2(h)}$.

(ii) On utilise le carré du DL donné dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\tan^2(h) &= (h + \frac{1}{3}h^3 + h^4\alpha(h))^2 \\ &= h^2 + 2h\frac{1}{3}h^3 + Ch^6 + ... \\ &= h^2 + \frac{2}{3}h^4 + h^4\beta(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\beta(h) = 0, \text{ donc :}\end{aligned}$$

$$h^2 - \tan^2(h) = -\frac{2}{3}h^4 + h^4\gamma(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\gamma(h) = 0.$$

(iii) On a : $\dfrac{1}{\tan^2(h)} - \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{h^2 - \tan^2(h)}{\tan^2(h).h^2}$ (ce qui transforme une forme indéterminée "$\infty - \infty$" en "$\dfrac{0}{0}$".

D'après les DL précédent on a aussi $\tan^2(h) = h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, donc le quotient étudié s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{h^2 - \tan^2(h)}{\tan^2(h).h^2} &= \frac{-\frac{2}{3}h^4 + h^4\gamma(h)}{h^2(h^2 + h^2\varepsilon(h))}, \\ &= \frac{-\frac{2}{3} + \gamma(h)}{1 + \varepsilon(h)}, \text{ en simplifiant en haut et en bas par } h^4.\end{aligned}$$

La limite cherchée vaut donc : $\ell = -\dfrac{2}{3}$.

On fixe pour les deux dernières questions du problème un entier $N \in \mathbb{Z}$, et on pose $X = N.\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

(iv) Prouver qu'il existe une fonction G et un réel L tels que :

Si $0 < |h| < \dfrac{\pi}{2}$, alors $X + h \in]N.\pi, N.\pi + \dfrac{\pi}{2}[$ ou $]N.\pi + \dfrac{\pi}{2}, N.\pi + \pi[$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}f(X+h) &= e^{X+h-\tan^2(X+h)} \\ &= e^{X+h-\tan^2(N.\pi+\frac{\pi}{2}+h)}, \text{ d'après l'expression de } X, \\ &= e^{X+h-\tan^2(\frac{\pi}{2}+h)}, \text{ parce tan est } \pi\text{−périodique}, \\ &= e^{X+h-\frac{1}{\tan^2(h)}}, \text{ d'après le (i)}, \\ &= e^{X+h-\frac{1}{\tan^2(h)}+\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^2}}, \\ &= e^{-\frac{1}{h^2}}G(h) \text{ en posant } G(h) = e^{X+h+\frac{1}{h^2}-\frac{1}{\tan^2(h)}}.\end{aligned}$$

D'après le (iii) on aura $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{\tan^2(h)} = \dfrac{2}{3}$, donc, la fonction $x \mapsto e^x$ étant continue,

$$\lim_{h\to 0} G(h) = e^{X+0+\frac{2}{3}} = e^{N.\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}} = L.$$

En prenant cette valeur pour L, on a ce qu'on voulait.

(v) Pour tout entier $p > 0$, on peut écrire d'après le (iv) :

$\dfrac{f(X+h)}{h^p} = \dfrac{e^{-\frac{1}{h^2}}G(h)}{h^p} = \dfrac{(\frac{1}{h})^p}{e^{(\frac{1}{h})^2}}G(h) = \dfrac{T^{\frac{p}{2}}}{e^T}G(h)$ en posant $T = \dfrac{1}{h^2}$ qui tend vers $+\infty$ quand $h \longrightarrow 0$.

Sous cette forme, une exponentielle dominant une puissance en $+\infty$, on voit bien que le quotient étudié tend vers $0 \times L = 0$ quand $h \to 0$. Si on note $\eta_p(h)$ ce quotient, on a donc :

$$f(X+h) = h^p\eta_p(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\eta_p(h) = 0.$$

Conclusion : la fonction f a un DL à tout ordre $p \in \mathbb{N}^*$ en X, et tous les termes de ce DL sont nuls !