Corrigé du partiel d'analyse

Exercice 1 (voies PMM et Math) :

(1) $u_1 = \dfrac{3.2+5}{3+2} = \dfrac{11}{5}$, $u_2 = \dfrac{3.\frac{11}{5}+5}{3+\frac{11}{5}} = \dfrac{3.11+5.5}{3.5+11} = \dfrac{58}{26} = \dfrac{29}{13}$.

(2) On a : $A + \dfrac{B}{3+u_n} = \dfrac{A(u_n+3)+B}{3+u_n} = \dfrac{Au_n+(3A+B)}{3+u_n}$. Il suffit donc de prendre $A=3$ et $3A+B=5$ pour obtenir l'égalité voulue, ce qui donne $A=3, B=5-3A=-4$. On a bien :

$$\forall n,\quad u_{n+1} = \frac{3u_n+5}{u_n+3} = 3 - \frac{4}{3+u_n}.$$

(3) On montre par récurrence que l'hypothèse (H_n) : $2 \leq u_n \leq 3$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pour $n=0$, (H_0) est vraie car $u_0 = 2 \in [2,3]$.

(b) Supposons que pour un entier n, (H_n) soit vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_n \leq 3$. Montrons que (H_{n+1}) est aussi vraie.

D'après le (1) on a $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n+3}$. On a par hypothèse de récurrence :

$2 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 5 \leq 3+u_n \leq 6 \Rightarrow \frac{4}{5} \geq \frac{4}{3+u_n} \geq \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{4}{5} \leq -\frac{4}{3+u_n} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{11}{5} = 3 - \frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

Comme on a $2 < \frac{11}{5}$ et $\frac{7}{3} < 3$, on en tire bien $2 \leq u_{n+1} \leq 3$: ainsi (H_{n+1}) est encore vraie.

Par récurrence, on peut affirmer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3$.

(4) (i) C'est du calcul :

$\forall n, u_{n+1} - \sqrt{5} = \dfrac{3u_n+5}{u_n+3} - \sqrt{5} = \dfrac{3u_n+5-\sqrt{5}(u_n+3)}{u_n+3} = \dfrac{(3-\sqrt{5})u_n+(5-3\sqrt{5})}{u_n+3} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+u_n}.(u_n - \sqrt{5})$,

en remarquant que $5 - 3\sqrt{5} = \sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5} = -\sqrt{5}(3-\sqrt{5})$.

(ii) D'après le (i), pour tout entier n, on a :

$|u_{n+1} - \sqrt{5}| = |\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+u_n}|.|u_n - \sqrt{5}| = \dfrac{|3-\sqrt{5}|}{3+u_n}.|u_n - \sqrt{5}|$.

Le (3) nous donne pour tout n : $u_n \geq 2 \Rightarrow u_n + 3 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n+3} \leq \frac{1}{5}$.

On a donc :

$|u_{n+1} - \sqrt{5}| =\leq |3-\sqrt{5}|.\dfrac{1}{5}.|u_n - \sqrt{5}|$.

Il suffit donc de prouver $|3-\sqrt{5}| < 1$ pour obtenir l'inégalité voulue, or c'est évident car $2 < \sqrt{5} < 3$ puisque $4 = 2^2 < 5 < 3^2 = 9$.

On a donc bien l'inégalité voulue.

(iii) Soit l'hypothèse : $(H'_n)|u_n - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{4 \times 5^n}$. On va montrer par récurrence sur n que (H'_n) est toujours vraie.

(a) (H'_0) s'écrit : $|u_0 - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{4 \times 5^0} \iff |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 \leq \dfrac{1}{4 \times 1} \iff \sqrt{5} \leq 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{4}$.

Ceci s'écrit donc $4\sqrt{5} \leq 9 \iff 4^2.5 \leq 9^2 \iff 16.5 = 80 \leq 81$ qui est vraie. (H'_0) est donc vraie.

(b) supposons (H'_n) vraie, pour un entier n fixé, et montrons que (H'_{n+1}) en découle.

On a : $|u_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \dfrac{1}{5}|u_n - \sqrt{5}|$ d'après le (ii)

$\leq \dfrac{1}{5}[\dfrac{1}{4 \times 5^n}]$ par l'hypothèse de récurrence (H'_n),

$= \dfrac{1}{4 \times (5.5^n)} = \dfrac{1}{4 \times 5^{n+1}}$.

Donc (H'_{n+1}) est encore vraie.

Par récurrence, (H'_n) est toujours vraie.

(5) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{5^n} = 0$ d'après le cours, l'inégalité du (3)(iii) entraîne (grâce encore aux théorèmes du cours) : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{5}$.

(6) On a trouvé $u_2 = 29/13 = 2,23...$ et par le (3)(iii) $|u_2 - \sqrt{5}| \leq \frac{1}{4\times 5^2} = \frac{1}{4\times 25} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$. Donc le réel $u_2 = 2,23...$ est une approximation à 10^{-2} de $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (voies PMM) : On peut résoudre d'abord chacune des deux inéquations :

La deuxième est simple, $x^2 - x - 1$ est un trinôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1 - 4(-1) = 5$, de racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On a donc :

$x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.

Pour la deuxième, il y a un "domaine de définition" : $\sqrt{x+2} > x$ n'a de sens que si $\sqrt{x+2}$ est définie c'est-à-dire $x \geq -2$.

Par ailleurs une inégalité de la forme : $\sqrt{A} > B$, est équivalente à : ($B \leq 0$ ou $A > B^2$).

On a donc, pour un $x \geq -2$:

$\sqrt{x+2} > x \iff (x \leq 0 \text{ ou } x+2 > x^2) \iff (x \leq 0 \text{ ou } x^2 - x - 2 < 0) \iff (x \leq 0$ ou $(x-2)(x+1) < 0) \iff (x \leq 0 \text{ ou } x \in]-1, 2])$.

En mettant bout à bout toutes ces conditions, on obtient finalement :

$\sqrt{x+2} > x \iff x \in [-2, 2[$.

Les solutions de notre système d'inéquations sont donc les réels x pour lesquels on a à la fois $(x \in]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$ et $x \in [-2, 2[)$.

Comme $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6...$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6...$, on obtient comme ensemble solution :

$S = [-2, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 2[$.

Cet ensemble, réunion d'intervalles, admet comme borne inférieure -2 et comme borne supérieure 2. Comme $-2 \in S$, -2 est aussi le plus petit élément ou le minimum de S. Comme $2 \notin S$, on peut affirmer que *S n'a pas de plus grand élément.*

Remarque : pour des intervalles, on ne demande pas de justification du calcul de la borne sup ou de la borne inf, mais on pouvait en donner de simple.

(i) Quels sont les minorants de S ? -2 minore $[-2, +\infty[$ donc minore S, et comme $-2 \in S$, d'après le cours $-2 = inf(S) = sup(S)$.

(ii) 2 majore $]-\infty, 2[$ donc 2 majore S. Un nombre $x = 2 - \varepsilon$ avec ε "petit", par exemple $1,9 < x < 2$, ne majore pas S puisqu'on peut trouver des éléments de S plus grand que x, par exemple $2 - \varepsilon/2 = (x+2)/2$. Ainsi 2 est le plus petit majorant de S, donc sa borne supérieure, et comme $2 \notin S$, S n'a pas de plus grand élément (cf cours).

Exercice 3 (voie PMM) :

(1) L'application $x \mapsto x + \dfrac{1}{x^2+x+1}$ envoie un nombre strictement positif sur un nombre strictement positif. On a donc une "récurrence" immédiate :

$v_0 > 0 \Rightarrow v_1 > 0 \Rightarrow v_2 > 0 \Rightarrow ....$

La suite est donc bien définie et positive.

Une fois qu'on sait qu'elle est positive, il est claire que pour tout n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{v_n^2 + v_n + 1} > 0$, donc la suite est strictement croissante.

(2) (i) Si v_n convergeait vers ℓ, la suite $(v_{n+1})_n$ convergerait aussi vers ℓ (suite extraite), et d'après les théroèmes sur les opérations et les limites, $v_n + \dfrac{1}{v_n^2 + v_n + 1}$ convergerait vers $\ell + \dfrac{1}{\ell^2 + \ell + 1}$.

L'égalité $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{v_n^2 + v_n + 1}$ donnerait donc, "en passant à la limite" :

$\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^2 + \ell + 1}$.

(ii) L'égalité trouvée au (i) est impossible, puisqu'elle entraîne : $0 = \dfrac{1}{\ell^2 + \ell + 1}$. Or l'inverse d'un nombre ne peut jamais être nul.

L'hypothèse que $(v_n)_n$ est convergente amène une conséquence absurde, il faut donc conclure que la suite $(v_n)_n$ ne peut converger vers un réel. Comme elle est croissante, elle a forcément une limite (cours) et donc cette limite ne peut qu'être infinie.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 4 (voie Math) :

(1) Pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ donc v est strictement croissante.

(2) On a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
v_{2n} - v_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{en supprimant les termes redondants,} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{car on a pour tout } k : 0 \leq k \leq n \Rightarrow n+k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}, \\
&= n.\frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

(3) On a $v_{2n} - v_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}} \Rightarrow v_{2n} \geq v_{2n} - v_n \geq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

Cela donne si $n \in \mathbb{N}$ est un nombre pair, $n = 2p$:

$v_n = v_{2p} \geq \sqrt{\dfrac{p}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{n}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{n}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{n}$.

Par ailleurs v étant croissante pour $n \geq 3$ impair, $n-1$ est pair et on a :

$v_n \geq v_{n-1} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}$.

En synthétisant tout cela, il vient : $\forall n \geq 1, v_n \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{n-1}$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Autre méthode : la suite v étant croissante, elle tend vers une limite finie ou infinie. Si sa limite ℓ était finie, la suite $(v_{2n} - v_n)_n$ tendrait vers $\ell - \ell = 0$, or d'après le (2) $v_{2n} - v_n$ tend vers $+\infty$, donc v aussi.

Exercice 5 (voie Math) :

(1) Si $x \in E$, on peut trouver n, m tels que $0 < n < m$ et $x = \sqrt{m} - \sqrt{n}$. On a alors $0 < n < m \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{m} \Rightarrow 0 < \sqrt{m} - \sqrt{n} = x$. Ainsi tout élément de E est > 0, c'est-à-dire : $E \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

(2) (i) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < 1 < n+1$ donc $x = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1 \in E$.

(ii) D'après le cours (et notre grande culture générale) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

(iii) E n'est pas majoré signifie qu'aucun réel n'est un majorant de E, autrement dit que pour tout réel A, il y a (au moins) un élément $x \in E$ tel que $x > A$.

Partons d'un tel réel A quelconque. Utilisons le fait rappelé au (ii) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

On a donc un rang N à partir duquel $\sqrt{n+1} > A + 1$ (définition de la limite infinie appliquée à $A+1$).

Ainsi on peut trouver au moins un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{n_0+1} > A + 1 \Rightarrow x_0 = \sqrt{n_0+1} - 1 > A$.

Ce x_0 est un élément de E qui est plus grand (strictement) que A. On peut choisir un tel x_0 pour tout $A \in \mathbb{R}$, donc E n'est pas majoré.

(3) (i) Comme les nombres mis en jeu sont positif, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\begin{aligned}\sqrt{n} < \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{2.\sqrt{n}} &\iff (\sqrt{n})^2 < (\sqrt{n+1})^2 < (\sqrt{n} + \frac{1}{2.\sqrt{n}})^2 \\ &\iff n < n+1 < (\sqrt{n})^2 + 2.\sqrt{n}.\frac{1}{2.\sqrt{n}} + (\frac{1}{2.\sqrt{n}})^2 \\ &\iff n < n+1 < n+1+\frac{1}{4n} \quad \text{qui est totalement évidente.}\end{aligned}$$

(ii) D'après le (i) on a pour tout $n \geq 1$: $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Ceci redonne le résultat classique : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang N à partir duquel $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$, donc on peut certainement trouver $n \geq 1$ pour lequel $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$.

(iii) D'après le (1) E est minoré par 0. D'après le (ii) si $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$. Cela signifie que $x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est un élément de E avec $0 < x < \varepsilon$.

Ainsi 0 minore E et un réel $\varepsilon > 0$ ne minore pas E. 0 est le plus grand minorant de E, c'est-à-dire par définition sa borne inférieure.

(iv) E n'admet pas d'élément minimum puisque sa borne inférieure est 0 d'après le (iii) et que $0 \notin E$ d'après le (1).