Corrigé du partiel

Exercice 1 :

1. Autant discuter le signe de x le plus tard possible et résoudre l'inéquation sur la valeur absolue, en notant que $|x|^2 = x^2$.

Donc : $x \in E \iff |x|^2 - 5|x| + 6 < 0 \iff 2 < |x| < 3$.

En effet le trinôme de degré 2 de coefficient dominant positif $t^2 - 5t + 6$ est négatif entre les racines, qu'on calcule sans peine ($\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1, t_1 = \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2, t_2 = \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$).

Finalement $x \in E \iff [(x \geq 0$ et $2 < x < 3)$ ou $(x \leq 0$ et $2 < -x < 3)]$, et $E =]-3, -2[\cup]2, 3[$.

On a donc $sup(E) = 3, inf(E) = -3$ (ces nombres, respectivement, majorent et minorent E, et comme ce sont des bornes d'intervalles contenus dans E, il n'y a pas de majorant plus petit, ou de minorant plus grand).

On peut remarquer que, ces nombres n'étant pas éléments de E, E n'a ni plus grand ni plus petit élément.

2. On résoud de même qu'au 1. : $x \in E \iff |x|^2 - 5|x| + a < 0$.

Cette fois, $\Delta = 25 - 4a$.

<u>1$^{\text{er}}$ cas :</u> $\Delta \leq 0$. Alors le trinôme $t^2 - 5t + a$ ne prend jamais de valeurs < 0, donc E est vide. Cela correspond à $25 - 4a \leq 0 \iff \dfrac{25}{4} \leq a$.

<u>2$^{\text{ème}}$ cas :</u> $a < \dfrac{25}{4}$, donc $\Delta > 0$. Le trinôme a deux racines, $t_- = \dfrac{5 - \sqrt{25 - 4a}}{2}, t_+ = \dfrac{5 + \sqrt{25 - 4a}}{2}$. On a $t_- < t_+$ et, de plus, $t_+ > 0$ car on a une somme de nombres positifs.

D'après l'inéquation, $x \in E \iff |x|^2 - 5|x| + a < 0 \iff t_- < |x| < t_+$.

Si $t_- < 0$, comme on a toujours $|x| \geq 0$, cela se réduit à $|x| < t_+$, donc à $-t_+ < x < t_+$, et $E =]-t_+, t_+[$.

Si $t_- \geq 0$, on est dans la même configuration qu'au 1., et $x \in E \iff t_- < x < t_+$ ou $t_- < -x < t_+$, soit $E =]-t_+, -t_-[\cup]t_-, t_+[$.

Dans les deux cas, $sup(E) = t_+, inf(E) = -t_+$, avec $t_+ = \dfrac{5 + \sqrt{25 - 4a}}{2}$.

On peut facilement, si on le souhaite, savoir dans lequel des deux cas évoqués ci-dessus on se trouve : en effet, la discussion repose sur $t_- < 0$ ou $t_- \geq 0$, autrement dit 0 est-il dans l'intervalle $[t_-, t_+]$ ou non. Ceci revient à savoir si 0 a une image négative par le trinôme.

On peut donc affirmer que $t_- < 0$ si et seulement si $0^2 - 5 \times 0 + a = a < 0$, dans ce cas $E =]-t_+, t_+[$.

Si $0 \geq a < \dfrac{25}{4}$, alors $t_- \geq 0$ et $E =]-t_+, -t_-[\cup]t_-, t_+[$.

Exercice 2 :

1. $\forall n, |\sin(\frac{\pi}{2} n)| \leq 1$ et $\dfrac{3^n + n.\sin(n) + 1}{2^{2n+1} + \log(n) + 5} = \dfrac{3^n(1 + \frac{n.\sin(n)}{3^n} + \frac{1}{3^n})}{4^n(2 + \frac{\log(n)}{4^n} + \frac{5}{4^n})} = (\dfrac{3}{4})^n \dfrac{1 + \frac{n.\sin(n)}{3^n} + \frac{1}{3^n}}{2 + \frac{\log(n)}{4^n} + \frac{5}{4^n}}$.

Chacun des quotients $\dfrac{n.\sin(n)}{3^n}, \dfrac{1}{3^n}, \dfrac{\log(n)}{4^n}, \dfrac{5}{4^n}$ tend vers 0, les exponentielles l'emportant (ce qui prouve au passage que la suite est bien définie, au moins à partir d'un certain rang). Le quotient $(\dfrac{3}{4})^n$ aussi, car : $0 < \dfrac{3}{4} < 1$. Finalement le quotient étudié tend vers $0.\dfrac{1 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = 0$, et comme :

$$|\sin(\frac{\pi}{2} n) \frac{3^n + n.\sin(n) + 1}{2^{2n+1} + \log(n) + 5}| \leq |\frac{3^n + n.\sin(n) + 1}{2^{2n+1} + \log(n) + 5}|,$$

la limite demandée vaut 0.

2. $\dfrac{n^3 + \log(n) + 2}{n^3 + n + 1} = \dfrac{n^3(1 + \frac{\log(n)}{n^3} + \frac{2}{n^3})}{n^3(1 + \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3})} = \dfrac{1 + \frac{\log(n)}{n^3} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \dfrac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$.

En effet les puissances comme n^3 l'emportent sur un log.

Exercice 3 :

1. $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = u_1^2 = (a^2)^2 = a^4, u_3 = u_2^2 = (a^4)^2 = a^{4\times 2} = a^8, \ldots$; en fait, $u_n = a^{2^n}$, comme on le voit immédiatement par récurrence (c'est vrai pour $n = 0, u_0 = a = a^1 = a^{2^0}$, et ci c'est vrai à un certain rang n, si $u_n = a^{2^n}$, alors au rang $n + 1$ on aura : $u_{n+1} = u_n^2 = a^{2^n 2} = a^{2^n \times 2} = a^{2^{n+1}}$.)

Par ailleurs, on peut aussi écrire $u_n = (a^2)^{2^{n-1}}$, ce qui nous ramène à une base d'exponentielle $a^2 \geq 0$.

Comme la suite 2^{n-1} est strictement croissante et tend vers l'infini, et que c^k et croissant et tend vers l'infini avec k si $c > 1$, est décroissant et tend vers 0 si $0 < c < 1$, et est constante si $c \in \{0, 1\}$, on en déduit le comportement de la suite $(u_n)_n$ par composition :

Si $|a| > 1$, la suite est strictement croissante vers $+\infty$, (la croissance est vérifiée à partir du rang 1 d'après ce qu'on a dit ci-dessus, et comme $a = u_0 \leq |u_0| < u_0^2 = u_1$, elle marche aussi au rang 0).

Si $0 < a < 1$, la suite est strictement décroissante et tend vers 0.

Si $-1 < a < 0$, la suite est strictement décroissante et positive à partir du rang 1, avec un premier terme négatif, et tend vers 0.

Si $a = 0$ ou $a = 1$, la suite est constante (et tend vers cette valeur de a).

Si $a = -1$, la suite est constante égale à 1 à partir du rang 1 (elle est "*stationnaire*").

2. $(v_n)_n$ est la suite géométrique de premier terme 1/2 et de raison 1/2, donc $\forall n, v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$. On a vu que $u_n = (\frac{1}{2})^{2^n}$.

On aura donc $u_n \leq v_n$ si $n + 1 \leq 2^n$, inégalité qui se démontre par un nombre incalculable de méthodes.

Par exemple : $2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^1 + 1) = 1(2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^1 + 1) \geq 1 + 1 + ... + 1 = n$, donc $\forall n, 2^n \geq n + 1$.

Ceci pour rappeler l'identité cruciale $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + B^{n-1})$.

On pouvait aussi procéder par récurrence (à ce stade ou diretement pour prouver $u_n \leq v_n$).

3. On a donc pour tout n :

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \leq v_0 + v_1 + ... + v_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{n+1} = (\frac{1}{2})\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^{n+1} < 1.$$

Ainsi $\forall n, s_n < 1$. Comme $\forall n, s_{n+1} - s_n = u_{n+1} > 0$, la suite majorée s_n est aussi croissante, elle converge donc vers sa borne supérieure l. On a $l \leq 1$ puisque 1 majore la suite, et $l \geq s_1 = u_0 + u_1 > u_0 = 1/2$ puisque l doit majorer la suite aussi. Donc $l \in]1/2, 1]$.

Exercice 4 :

1. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et que $-2n\pi$ et $-(2n+1)\pi \longrightarrow -\infty$, u_n et v_n tendent vers 0.

Par ailleurs pour tout n : $f(u_n) = \cos(-2n\pi) = 1$, $f(v_n) = \cos(-(2n+1)\pi) = \cos(-\pi) = -1$. Ces suites sont constantes donc convergent vers leur valeur.

2. On applique le cours : la fonction f n'a pas de limite en 0^+ puisqu'on a trouvé deux suite $(u_n)_n, (v_n)_n$, positives, tendant vers 0, dont les images par f tendaient pas vers des limites différentes.

Exercice 3-bis : Flocon de Von Koch

1. $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (calculer la longueur de la hauteur par le th. de Pythagore par exemple).

3. Quand on passe du rang n au rang $n + 1$, on remplace chaque segment de longueur L_n de $\mathcal{T}_n$ par 4 segments 3 fois moins longs : les deux bouts extrêmes du segment d'origine et les deux côtés du nouveau triangle qui sont à l'extérieur de la figure. On remplace donc un contour de s_n segments de longueur L_n par un contour de $s_{n+1} = 4.s_n$ segments de longueur $L_{n+1} = \frac{1}{3}L_n$. Comme le périmètre est *nombre de segments* $\times$ *longueur de chacun*, on obtient :

$$p_{n+1} = s_{n+1}L_{n+1} = (4.s_n)(\tfrac{1}{3}L_n) = \tfrac{4}{3}s_nL_n = \tfrac{4}{3}p_n.$$

4. Ce sont des suites géométriques donc : $s_n = 4^n s_0 = 3 \times 4^n, L_n = (\frac{1}{3})^n L_0 = (\frac{1}{3})^n, p_n = (\frac{4}{3})^n p_0 = 3(\frac{4}{3})^n$.

5. $p_n \longrightarrow +\infty$ (suite géométrique de raison $\frac{4}{3} > 1$) : le Flocon a un périmètre infini.

6. En passant du rang n au rang $n + 1$, on rajoute un triangle sur chacun des $s_n = 3 \times 4^n$ segments du contour de $\mathcal{T}_n$. Ce sont des triangles équilatéraux de côtés L_{n+1} et donc d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4}L_{n+1}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9^{n+1}}$.

On a donc rajouté comme aire : $(3 \times 4^n) \times \frac{\sqrt{3}}{4 \times 9^{n+1}} = (\frac{4}{9})^n \frac{3\sqrt{3}}{4 \times 9} = \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^n$.

On a donc bien : $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^n$.

7. D'après les formules sur les sommes des termes d'une suite géométrique :

$1 + \frac{4}{9} + ... + (\frac{4}{9})^{n-1} = \frac{1 - (\frac{4}{9})^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1 - (\frac{4}{9})^n}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}(1 - (\frac{4}{9})^n) \longrightarrow \frac{9}{5}$ quand $n \longrightarrow +\infty$, car $0 < \frac{4}{9} < 1$.

8.
$$\begin{aligned} A_n = A_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^{n-1} = A_{n-2} + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^{n-2} + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^{n-1} &= ... = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^0 + ... + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^{n-2} + \frac{\sqrt{3}}{12}(\frac{4}{9})^{n-1} \\ &= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}(1 + \frac{4}{9} + ... + (\frac{4}{9})^{n-1}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5}(1 - (\frac{4}{9})^n) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}(\frac{4}{9})^n. \end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, cette aire tend donc vers $\frac{2\sqrt{3}}{5}$, qui est l'aire du Flocon.