EXERCICE 1

a) Pour tout n, on a : $|u_n| = \dfrac{|\sin(n^n+\pi)|}{n^2+3} \le \dfrac{1}{n^2+3}$, puisque un sinus est toujours inférieur à 1 en valeur absolue.
Finalement, cette inégalité prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Pour tout n, on a : $v_n = \dfrac{2^{n+2}-5^n}{2^n+4\times 5^n} = \dfrac{\frac{2^n}{5^n}2^2-1}{\frac{2^n}{5^n}+4} = \dfrac{4(\frac{2}{5})^n-1}{(\frac{2}{5})^n+4}$.
Or comme $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, la suite $(\dfrac{2}{5})^n$ tend vers 0. Par les règles d'opérations sur les limites, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et tend vers $\dfrac{4\times 0-1}{0+4} = -\dfrac{1}{4}$.

b) Le signe de w_n dépend de la parité de n. Et la valeur absolue de w_n est $|w_n| = \pi^n$, qui tend vers $+\infty$ car $\pi > 1$. Donc $w_{2n} = \pi^{2n}$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Et $w_{2n+1} = -\pi^{2n+1}$ tend vers $-\infty$, ce qui prouve que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.
La suite n'est ni majorée, ni minorée, elle ne peut donc avoir de limite (une suite convergente est bornée, une suite ayant pour limite $+\infty$ est minorée, une suite tendant vers $-\infty$ est majorée).

c) i- Soit $n \ge 1$. Alors on a :
$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 2\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\dfrac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
Or pour tout $n \ge 1$, on a $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$.
D'où finalement :

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ii- On applique le i- pour $k = 1, 2, ..., n$. On peut donc écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \ge 2(\sqrt{2}-1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ge 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ge 2(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$
$$\dots$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ge 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

D'où en additionnant les lignes :

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge 2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+...+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$$
$$= 2[-1+(\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{3})+...+(\sqrt{n}-\sqrt{n})+\sqrt{n+1}] = 2(\sqrt{n+1}-1)$$

Ce qu'on voulait prouver.

iii- La suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, donc la minoration de r_n par $2(\sqrt{n+1}-1)$ prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ("théorème des gendarmes infini").

EXERCICE 2

A) La définition est : "pour tout réel ε strictement positif, il existe un rang à partir duquel tous les x_n vérifient $|x_n-\lambda| < \varepsilon$, c'est-à-dire approchent λ à moins de ε près".
Cela s'écrit aussi : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, |x_n-\lambda| < \varepsilon$.

B) a) La suite $(u_{14n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite à la fois de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{7n})_{n\in\mathbb{N}}$, puisque pour tout n on a : $u_{14n} = u_{2p} = u_{7q}$ avec $p = 7n, q = 2n$.
Une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Ceci prouve que $(u_{14n})_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger vers ℓ_1, et aussi vers ℓ_3. Comme la limite d'une suite est unique, $\ell_1 = \ell_3$.
De même $u_{14n+7} = u_{2p+1} = u_{7q}$ avec $p = 7n+3, q = 2n+1$. Donc $(u_{14n+7})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite à la fois de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{7n})_{n\in\mathbb{N}}$, et converge vers ℓ_2 et ℓ_3, donc $\ell_2 = \ell_3$.
On a bien prouvé que $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$.

b) On va montrer que la définition de la convergence est satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ_1 (puisque $\ell_2 = \ell_1$), elles vérifient la définition de la convergence : il existe des rang n_1 et n_2 tels que :

$\forall n \geq n_1, |u_{2n} - \ell_1| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_2, |u_{2n+1} - \ell_1| < \varepsilon$

Posons $n_0 = max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

Soit $m \geq n_0$.

Ou bien m est pair, $m = 2n$, mais comme $m \geq n_0 \geq 2n_1$, on a $2n \geq 2n_1$ d'où $n \geq n_1$, ce qui entraîne par notre choix de n_1 :

$|u_{2n} - \ell_1| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|u_m - \ell_1| < \varepsilon$.

Ou bien m est impair, $m = 2n + 1$, mais comme $m \geq n_0 \geq 2n_2 + 1$, on a $n \geq n_2$, ce qui entraîne :

$|u_{2n+1} - \ell_1| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|u_m - \ell_1| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, on a :

$m \geq n_0 \Rightarrow |u_m - \ell_1| < \varepsilon$.

On peut trouver un tel n_0 pour tout ε, la définition est satisfaite et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers ℓ_1.

c) La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc le cas étudié en a) et b), où la suite $(u_{7n})_{n\in\mathbb{N}}$ prenait une infinité de termes aux deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, ne se reproduit pas.

Exemple : si $u_n = (-1)^n$, on aura $u_{2n} = u_{6n} = 1$ qui converge vers 1, et $u_{2n+1} = -1$ qui converge vers -1, mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non convergente, puisqu'elle a des suites extraites qui tendent vers des limites distinctes (-1 et 1).