EXERCICE 1 : (exponentielles, logarithmes, etc...) **On considère les fonctions suivantes :**

Fonction $F(x) =$	$a(x) = x^x$	$b(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}$	$c(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	$d(x) = (1+\frac{1}{x})^x$
D_F	$\mathbb{R}_+^*$	$]-\infty, 0[\cup]0, 1[$	$]-1, 0[\cup]0, +\infty[$	$]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
$F'(x) =$	$(\ln(x)+1)x^x$	$-\frac{1}{x^2}(\ln(1-x) + \frac{x}{1-x})(1-x)^{\frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2}(\ln(1+x) - \frac{x}{1+x})(1+x)^{\frac{1}{x}}$	$(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x})(1+\frac{1}{x})^x$
$\lim_{x\to 0^+} F(x) =$	1	$1/e$	e	1
$\lim_{x\to 1^-} F(x) =$	1	0	2	2
$\lim_{x\to +\infty} F(x) =$	$+\infty$	**pas défini**	1	e

Fonction $F(x) =$	$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{x^2}}$	$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$
D_F	$]-\infty, 0[\cup]0, 1[$	$]-1, 0[\cup]0, +\infty[$
$F'(x) =$	$-\frac{1}{x^3}(2\ln(1-x) + \frac{x}{1-x})(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$	$-\frac{1}{x^3}(2\ln(1+x) - \frac{x}{1+x})(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$
$\lim_{x\to 0^+} F(x) =$	0	$+\infty$
$\lim_{x\to 1^-} F(x) =$	0	2
$\lim_{x\to +\infty} F(x) =$	**pas défini**	1

Fonction $F(x) =$	$u(x) = (1+\frac{1}{\ln^2(x)})^x$	$v(x) = x^{\frac{1}{\ln(x)}}$
D_F	$]0, 1[\cup]1, +\infty[$	$]0, 1[\cup]1, +\infty[$
$F'(x) =$	$(\ln(1+\frac{1}{\ln^2(x)}) - \frac{2}{\ln^3(x)+\ln(x)})(1+\frac{1}{\ln^2(x)})^x$	0 **(en fait quand c'est défini la fonction vaut :** $x^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\ln(x)\frac{1}{\ln(x)}} = e^1 = e$)
$\lim_{x\to 0^+} F(x) =$	1	e
$\lim_{x\to 1^-} F(x) =$	$+\infty$	e
$\lim_{x\to +\infty} F(x) =$	$+\infty$	e

EXERCICE 2 : Calculs avec des intégrales

(1) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ **:** $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

(a) $u(t) = u'(t) = e^t, v(t) = (1-t)^n, v'(t) = -n(1-t)^{n-1}$ **:**

$$I_n = \int_0^1 u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt = [e^t(1-t)^n]_0^1 - (-n)\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^t dt = [0-1] + nI_{n-1}.$$

$$I_0 = \int_0^1 1.e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

(b) On divise juste l'identité du (a) par $n!$**.**

(c)

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{n!} &= v_n \\ &= \frac{-1}{n!} + v_{n-1} \\ &= \frac{-1}{n!} + \frac{-1}{(n-1)!} + v_{n-2} \\ &\dots \\ &= \frac{-1}{n!} + \dots + \frac{-1}{1!} + v_0 \\ &= -(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) + e - \frac{1}{0!}. \end{aligned}$$

(en utilisant $0! = 1$**).**

On en tire facilement la formule voulue.

(d) si $0 < t < 1$ **on a** $1 = e^0 < e^t < e = e^1$ **d'où** $(1-t)^n < e^t(1-t)^n < e(1-t)^n$**. En intégrant cela donne l'inégalité voulue car** $\int_0^1 (1-t)^n dt = [-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$**.**

Le théorème des gendarmes prouve alors que $(I_n)_n$ **tend vers** 0**, donc aussi** $v_n = I_n/n!$**, ce qui prouve la relation demandé (car** $v_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$**).**

(2) Même principe que (1).

(3) Même principe que (1). Pour (b) on trouve : $K_n = \frac{(2n)(2n-2)...(4)(2)}{(2n+1)(2n-1)...(5)(3)}$**. On peut transformer cette expression en multipliant en haut et en bas par le produit des nombres pairs qu'on notera** P **:** $P = (2n)(2n-2)...(2)$**. L'expression devient :**

$$K_n = \frac{P}{(2n+1)(2n-1)...(3)} = \frac{P.P}{(2n+1)(2n-1)...(3).P} = \frac{P^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)...(5)(4)(3)(2)} = \frac{P^2}{(2n+1)!}.$$

Maintenant on a :

$$P = (2n)(2n-2)...(4)(2) = [2\times n][2\times(n-1)]...[2\times 2][2\times 1] = [2.2...2.2][n(n-1)...2.1] = 2^n.n!,$$

d'où l'écriture voulue.

(4) C'est en bûchant qu'on devient bûcheron...

EXERCICE 3 : Une application de la formule de Taylor Lagrange

(1) Formule de Taylor Lagrange jusqu'à l'ordre 2 **: il existe** $c \in]a, b[$ **tel que :**

$$\ln(b) = \ln(a) + [\ln]'(a)(b-a) + [\ln]''(c)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Si on prend $a = n, b)n+1$**, compte tenu de** $\forall x > 0, [\ln]'(x) = \frac{1}{x}, [\ln]''(x) = -\frac{1}{x^2}$**, et de** $b - a = 1$**, on obtient :**

$$\exists c \in]n, n+1[, \ln(n+1) = \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{c^2}.\frac{1}{2}$$

Ce qui donne ce qu'on voulait.

(2) On a pour tout $n \geq 2$ **:** $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{2c_n^2}$ **avec les notations du (1). Comme un carré est positif, et que** $c_n > n$**, on a l'inégalité voulue.**

(3) $\forall n \geq 2, S_n - S_{n-1} > 0$ **prouve que** $(S_n)_n$ **est croissante.**

Par ailleurs on peut écrire :

$$S_n - S_1 = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + ... + (S_2 - S_1)$$
$$< \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n-1)^2} + ... + \frac{1}{2.2^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}$$ **en utilisant le (2).**

L'indication donne la marche à suivre : $k^2 > k(k-1)$ **donc** $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ **donc :**

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) + ... + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2})$$
$$= 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Et finalement $S_n - S_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow S_n < S_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln(2) = C$**.**

La suite $(S_n)_n$ **est croissante et majorée par** C**.**

(4) Une suite croissante et majorée converge. Ceci s'applique à $(S_n)_n$ **d'après les résultats du (3). Appelons** γ **la limite de** $(S_n)_n$**,** $r_n = S_n - \gamma$ **tend donc vers** 0**.**

On a donc une suite $(r_n)_n$ **tendant vers** 0 **telle que**

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \gamma = r_n \;;$$

Dans ce cas $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma = (\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \gamma) + \ln(n+1) - \ln(n) = r_n + \ln(1+1/n)$ **tend vers** $0 + \ln(1) = 0$ **donc on a l'écriture voulue.**