EXERCICE 1 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - 1$ sont de même signe.

La formule donnée dans l'énoncé prouve que pour tout n on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n) - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n - 2u_n) = \frac{1}{2}(u_n^2 - u_n) = \frac{1}{2}u_n(u_n - 1)$.

Ceci prouve que, si $u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - 1$ sont de même signe.

Or on a $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_n)$, ce qui assure que pour tout $n, u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$. Autrement dit, par une récurrence immédiate, on a : $\forall n, u_n > 0$. Ce qui conclut la question.

(b) Déduire du (a) que :

(i) Si $u_0 \in]0,1[, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et majorée par 1 ;

(ii) Si $u_0 \in]1,+\infty[, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et minorée par 1 ;

(i) Pour tout n tel que $0 < u_n < 1$, $u_n - 1$ est négatif, ce qui entraîne d'après le (a) que $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc aussi $u_{n+1} < u_n < 1$.

Si on nomme (P_n) la propriété "$u_n < 1$" on aura donc $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$ et comme (P_0) est vérifiée par hypothèse, on en déduit par récurrence :

$\forall n, u_n < 1$.

Cela entraîne, on l'a dit, $\forall n, u_{n+1} < u_n$. On a donc bien : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et majorée par 1.

(ii) Le même raisonnement que (i) peut être recopié en remplaçant "$u_n - 1$ négatif" par "$u_n - 1$ positif", et on obtient que $u_0 \in]1,+\infty[\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et minorée par 1.

(c) Expliquez le comportement de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$, en discutant suivant les valeurs de u_0.

CAS 1 : Si $0 < u_0 < 1$ la suite est décroissante d'après (b)(i), et minorée par 0 d'après les résultats du (a). D'après le cours "une suite décroissante et minorée est convergente". $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc une limite ℓ, qui est aussi la limite de la suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

La relation : $\forall n, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ et les propriétés de compatibilité des limites avec les opérations prouve que ℓ doit vérifier l'équation :

$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \ell^2) \iff 2\ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(\ell - 1) = 0 \iff \ell \in \{0, 1\}$.

Comme la suite est décroissante elle est minorée par u_0 : $\forall n, u_n \leq u_0 < 1$ donc la limite vérifie $\ell \leq u_0 < 1$.

La limite ne peut donc valoir 1, il reste : $\ell = 0$.

CAS 2 : Si $u_0 > 1$, d'après le (b)(ii) la suite est croissante. D'après le cours une suite croissante est soit convergente et majorée, soit non majorée et divergente vers $+\infty$.

Si elle était convergente vers une limite ℓ, la même équation que dans le Cas 1 serait valable, on aurait encore $\ell = 0$ ou 1, or la suite étant croissante on a : $\forall n, u_n \geq u_0 > 1$. Ceci est contradictoire avec $\ell \in \{0, 1\}$.

La seule possibilité est donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

CAS 3 : Il reste un cas, si $u_0 = 1$, comme $1 = \frac{1}{2}(1^2 + 1)$ la suite est constante (et converge bien sûr vers 1).

EXERCICE 2 **(A) On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et on fait l'hypothèse que :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \in [0, 1[.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ et un rang N_0 tel que : $\forall n \geq N_0, x_{n+1} \leq k.x_n$.

La définition de la limite prouve que, *pour tout* $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang $N = N(\varepsilon)$, tel que :

(*) $n > N \Rightarrow \lambda - \varepsilon < x_{n+1}/x_n < \lambda + \varepsilon$.

Si on applique cette définition pour un ε assez petit, on obtiendra un nombre k convenable en posant $k = \lambda + \varepsilon$. On veut que $k \in]\lambda, 1[$ et en fait *n'importe quel* nombre k de cet intervalle convient, il suffit de prendre $\varepsilon = k - \lambda$ pour obtenir le k voulu dans (*).

Pour fixer les idées on prendra $k = \frac{1+\lambda}{2}, \varepsilon = k - \lambda = \frac{1-\lambda}{2}$, on obtient pour k le milieu de l'intervalle $]\lambda, 1[$.

Le nombre $N = N_0$ fourni par la définition de la limite vérifie bien : $\forall n \geq N_0, \frac{x_{n+1}}{x_n} < k \Rightarrow x_{n+1} \leq k.x_n$.

(b) Prouver la majoration suivante : $\forall n \geq N_0, 0 < x_n \leq \frac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.

Appliquons le résultat du (a) si $n > N_0$:
$x_n \leq k.x_{n-1} \leq k.(k.x_{n-2}) = k^2.x_{n-2} \leq k^2.(k.x_{n-3}) = k^3.x_{n-3} \leq ... \leq k^p.x_{n-p}$
Tant que $n - p$ reste $\geq N_0$. Quand $n - p = N_0$ on a $p = n - N_0$ et on obtient donc :
$x_n \leq k^{n-N_0}.x_{N_0} = \dfrac{k^n}{k^{N_0}} x_{N_0} = \dfrac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.
Bien sûr on peut rédiger plus rigoureusement ceci en faisant une récurrence pour $n \geq N_0$, ou une multiplication “en cascade”. Le noeud de l'affaire étant que l'inégalité $x_{n+1} \leq k.x_n$ permet de montrer que (x_n) croît “moins vite” qu'une suite géométrique de raison k, du moins à partir du rang N_0.

(c) On a pour $n \geq N_0$: $0 < x_n \leq \dfrac{x_{N_0}}{k^{N_0}}.k^n$.
Comme $0 < k < 1$ la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. L'inégalité précédente permet donc d'appliquer le théorème des gendarmes et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(B) On calcule ce qui correspond à x_{n+1}/x_n pour ces trois suites strictement positives .

Pour $a_n = n^{10}/10^n$:
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{10}/10^{n+1}}{n^{10}/10^n} = [\dfrac{n+1}{n}]^{10}.\dfrac{1}{10} = (1+\dfrac{1}{n})^{10}.\dfrac{1}{10}$ a pour limite $\lambda = (1+0)^{10}.\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10} \in [0,1[$, donc le (A) s'applique et :
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Pour $b_n = 3^n/n!$:
$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \dfrac{3}{n+1}$ a pour limite $\lambda = 0 \in [0,1[$, donc le (A) s'applique et :
$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Pour $c_n = (2n)!/n!^2 = C_{2n}^n$:
$\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{[2(n+1)]!/(n+1)!^2}{(2n)!/n!^2} = \dfrac{\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{n!^2(n+1)^2}}{\frac{(2n)!}{n!^2}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\dfrac{2n+1}{n+1} = 2(2 - \dfrac{1}{n+1})$ a pour limite $\lambda = 2.2 = 4 \in [0,1[$, donc le (A) ne s'applique pas. Ceci dit on peut quand même conclure : si on pose $c'_n = 1/c_n$, on obtient comme quotient c'_{n+1}/c'_n l'inverse de c_{n+1}/c_n car :
$\dfrac{c'_{n+1}}{c'_n} = \dfrac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{1}{\frac{c_{n+1}}{c_n}}$.
Le quotient tend donc vers $1/4 \in [0,1[$, ce qui permet d'appliquer le (A)à la suite $(c'_n)_n$ qui tend vers 0. Finalement $(c_n)_n$ est l'inverse d'une suite positive tendant vers 0, donc :
et :
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.