Fiche de cours 5 - Calcul intégral.

Primitives et intégrales

Définition : soit deux fonctions f, F, définies sur un intervalle I non réduit à un point. La fonction F est une primitive de f sur I si elle et dérivable et qu'on a $F' = f$.

Remarque : la fonction F est alors obligatoirement continue, comme on l'a déjà signalé dans le chapitre sur la dérivation.

Propriété : si f admet une primitive F sur I, elle admet pour primitive les fonctions $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Propriété : si f admet des primitives sur I, et si $a, b \in I$, le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Définition : si f est une fonction qui admet des primitives sur I, et si $a, b \in I$, le réel $F(b) - F(a)$, calculé avec n'importe quelle primitive de f sur I, s'appelle intégrale de a à b de f et se note :

$$\int_a^b f(x)dx,$$

notation dans laquelle le x n'est qu'une variable muette et peut être remplacé par n'importe quelle lettre (sauf bien sûr, dans ce cas, a, b, f).

Propriétés des intégrales - 1 : Soient f, g deux fonctions admettant des primitives sur I, et $a, b, c \in I$.

(a) Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. On a aussi :

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

(b) Linéarité de l'intégration : si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b (\lambda.f(x) + \mu.g(x))dx = \lambda.\int_a^b f(x)dx + \mu.\int_a^b g(x)dx.$$

(c) Positivité de l'intégration : si $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) > 0$) sur I et que $a \leq b$ (resp. $a < b$), on a :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \text{ (resp. } \int_a^b f(x)dx > 0).$$

Plus généralement si $m.g(x) \leq f(x) \leq M.g(x)$ (resp. $m.g(x) < f(x) < M.g(x)$) sur I et que $a \leq b$ (resp. $a < b$), on a :

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.\int_a^b g(x)dx \text{ (resp. } m\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < M.\int_a^b g(x)dx).$$

(d) Formule de la moyenne : si $m \leq f(x) \leq M$ sur I, et si $a \neq b$, on a : $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$, et de plus il existe $\xi \in I$, situé entre a et b, tel que :

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi) \qquad .$$

Preuve

(a) Ces formules s'écrivent $[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = [F(c) - F(a)], F(a) - F(a) = 0, F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$ et sont donc évidentes.

(b) La dérivation étant linéaire, si F et G sont des primitives de f et g, $\lambda.F + \mu.G$ est une primitive de $\lambda.f + \mu.g$, et on a bien :

$$(\lambda.F + \mu.G)(b) - (\lambda.F + \mu.G)(a) = \lambda.(F(b) - F(a)) + \mu.(G(b) - G(a)).$$

(c) Si $f \geq 0$ (resp. $f > 0$), une primitive F de f est croissante (resp. strictement croissante) puisqu'elle a pour dérivée la fonction positive (resp. strictement positive) f. Si $a \leq b$ (resp. $a < b$) on aura alors $F(a) \leq F(b)$ c'est-à-dire $F(b) - F(a) \geq 0$ (resp. $F(a) < F(b)$ et $F(b) - F(a) > 0$).

La propriété plus générale en découle, en remarquant par exemple que $f(x) \leq M.g(x)$ si et seulement si la fonction $M.g(x) - f(x)$ est positive.

(d) L'inégalité est conséquence du (c) (prendre g(x)=1), mais on peut aussi la faire découler de l'existence de ξ, et donc du théorème des accroissements finis : $\exists \xi, f(\xi) = F'(\xi) = \dfrac{F(b) - F(a)}{b-a}$.

Propriété (intégrales, primitives et aires) : Soit f une fonction admettant une primitive sur I, soit $a \in I$, et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ sur I :

(a) la fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

(b) par ailleurs, si f est continue, et qu'on peut simplement définir l'aire comprise entre l'axe horizontal et un arc de la courbe $y = f(x)$, alors pour tout b, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est l'aire algébrique comprise entre la courbe de f, l'axe horizontal, et les verticales $x = a$ et $x = b$ (aire algébrique = on compte négativement quand $a > b$ ou quand l'arc de courbe est sous l'axe horizontal, c'est-à-dire quand $f(x) < 0$).

Preuves :

(a) Soit G n'importe qu'elle primitive de f. Comme $F(x) = G(x) - G(a)$ est de la forme $G+$ une constante, c'est une primitive de f. Une autre primitive s'écrit forcément $G(x) + C$, et si elle s'annule en $x = a$ cela veut dire que :

$$G(a) + C = 0 \Rightarrow C = -G(a) \Rightarrow \forall x, G(x) + C = G(x) - G(a) = F(x).$$

(b) Supposons qu'on ait pu définir la fonction $\mathcal{A}(u)$, aire algébrique entre la courbe, les droites $x = a$ et $x = u$, et l'axe horizontal. Si u est fixé, et h est "petit", de telle sorte que $f(u + h)$ est voisin de $f(u)$, on peut considérer la courbe de f comme localement égale à $f(u)$, auquel cas l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe horizontale et les droites $x = u$ et $x = u + h$, serait l'aire d'un rectangle de côté verticale $f(u)$ et de côté horizontal $(u + h) - u = h$. Cette aire doit aussi valoir $\mathcal{A}(u + h) - \mathcal{A}(u)$. On obtient donc :

$$\mathcal{A}(u + h) - \mathcal{A}(u) \approx h.f(u) \Rightarrow \frac{\mathcal{A}(u + h) - \mathcal{A}(u)}{h} \approx f(u).$$

Ainsi, quand $h \to 0$, cela donnerait $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(u + h) - \mathcal{A}(u)}{h} = f(u)$, ou encore $\mathcal{A}'(u) = f(u)$.
Autrement dit, si la fonction $\mathcal{A}$ existe, c'est une primitive de f.

Dans ce semblant de calcul, on a surtout utilisé la continuité de f en u.

À quelles fonctions appliquer ces calculs ?

Les fonctions pour lesquelles on peut définir une fonction $\mathcal{A}$ comme dans la propriété ci-dessus sont les fonctions *intégrables*. On peut définir directement les valeurs de la fonction $\mathcal{A}$ comme limites de *sommes de Riemann*, qui sont obtenues comme approximations de l'aire sous la courbe par l'aire d'une réunion de rectangles : $h_1.f(u_1) + h_2.f(u_2) + ... + h_n.f(u_n)$, avec $[a, b]$ décomposé en n intervalles de longueurs h_i contenant chacun u_i. On ne fera pas cette construction ici.

Malheureusement, on peut être intégrable sans avoir de primitive, et avoir une primitive sans qu'on puisse définir simplement une intégrale.

Exemple 1 : Posons $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = -1$ si $x < 0$. Le domaine entre la courbe et l'axe horizontal est une somme d'au plus 2 rectangle, on peut donc définie l'aire $\mathcal{A}$. Si on la prend à partir de $x = 0$, on obtient $\mathcal{A}(x) = |x|$, fonction qui n'est pas dérivable en 0. Le résultat n'est donc pas vraiment une primitive de f, alors que cette fonction est une des plus simples imaginables pour définir l'intégrale.

Exemple 2 : Posons $F(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$, et $F(0) = 0$. On voit facilement que :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{F(x)}{x} = x \sin(\frac{1}{x^2})$$

tend vers 0 si $x \to 0$, et si $x \neq 0$, $F'(x) = 2x \sin(\dfrac{1}{x^2}) + x^2(-\dfrac{2}{x^3}) \cos(\dfrac{1}{x^2})$.

Autrement dit F est la primitive de la fonction f telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \sin(\dfrac{1}{x^2}) - \dfrac{2}{x} \cos(\dfrac{1}{x^2})$.

Cette fonction n'étant pas bornée au voisinage de 0, les sommes de Riemann n'approchent sûrement aucune aire par exemple sur $[0, 1]$. Si on considère une telle somme $h_1 f(u_1) + ...$ avec h_1 petit et $u_1 \in [0, h_1]$, on peut prendre u_1 parmi les termes assez petit de la suite $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi + \pi}}$, on obtient $f(x_n) \approx 2\sqrt{2n\pi + \pi} \to +\infty$ et donc des "petits rectangles" d'aire $h_1 f(u_1)$ qui prennent des valeurs aussi grandes qu'on veut !

Embêtés par ces exemples, on ne sait que décider,
Le plus raisonnable semble, de nous-même limiter
Les fonctions avec lesquelles, faire du calcul intégral,
Et les prendre régulières, sans excès dans l'anormal...

Définition : Soit I un intervalle. Une fonction f, définie sur I, sera dite continue par morceaux, si on peut trouver une suite finie de points de I : $a_1 < a_2 < ... < a_n$, telle que :

(a) f est continue sur chaque intervalle $]a_1, a_2[,]a_2, a_3[, ...,]a_{n-1}, a_n[$, ainsi que sur la portion de I située avant a_1 et sur celle située après a_n, si ces portions constituent des intervalles de longueurs non nulles.

(b) f admet une limite finie en $a_1^+, a_2^-, a_2^+, a_3^-, ..., a_n^-$, ainsi qu'en a_1^- et a_n^+ si cela a un sens.

Théorème (admis) : Si f est une fonction continue par morceau sur un intervalle I, continue sauf peut-être en $a_1 < a_2 < ... < a_n$, on peut définir une fonction $\mathcal{A}$ telle que :

(a) $\mathcal{A}$ est **continue** sur I ;

(b) $\mathcal{A}$ est dérivable en tout point de I différent des a_k, et admet en a_k des dérivées à gauche et à droites égales aux limites correspondantes de f.

Définition : On dit qu'une telle f est intégrable sur I, on appelle encore $\mathcal{A}$ une primitive de f, et la continuité de $\mathcal{A}$ assure que toutes les formules et propriétés vues précédemment, à l'exception de la formule de la moyenne (existence de ξ...), restent vraies pour les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a)$.

Calcul de primitives et intégrale indéfinie

Ainsi qu'on l'a vu, le calcul d'une intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ dont la borne x peut varier, revient à la recherche d'une primitive de f (celle qui s'annule en a). On introduit la convention de notation suivante, d'usage courant :

Défintion-notation : Si f est intégrable sur I, on notera $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$, une primitive quelconque de f sur I. Dans cette écriture, le x *est bien la variable considérée*, et n'est donc plus une variable muette.

On verra dans les formules de calcul comment utiliser cette notation, dite "d'intégrale indéfinie".

Méthode de calculs usuelles et quelques primitives classiques.

Pour calculer des intégrales et des primitives, on dispose des primitives connues de fonctions simples, et de deux formules pour se ramener à de telles fonctions : l'intégration par partie et la formule de changement de variable.

Propriété - intégration par partie : Soient u, v deux fonctions définies et continûment dérivables sur un intervalle I. Alors :

(a)

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) + \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

(b) Pour le calcul des primitives (intégrale indéfinie) cela donne : $\displaystyle\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Preuves :

(a) On a $(u(t)v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$, et comme ces fonctions sont continues et donc intégrables, on on peut intégrer membre à membre, en remarquant que $t \mapsto u(t)v(t)$ est une primitive de $t \mapsto (u(t)v(t))'$.

(b) Quand $b = x$ est variable, la formule donne : $\displaystyle\int_a^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - u(a)v(a) + \int_a^x u'(t)v(t)dt$. La formule écrite est identique, en enlevant le terme $u(a)v(a)$ constant par rapport à x.

Propriété - changement de variable : Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I, et $u : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle J, telle que $\forall x \in J, u(x) \in I$. Alors :

(a) La fonction $x \mapsto f(u(x))u'(x)$ est intégrable sur J, et :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \int_\alpha^\beta f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt.$$

(b) Pour les intégrales indéfinies, cela donne : $\displaystyle\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(u)du$ avec $u = u(x)$.

Preuves :

(a) Si F est une primitive de f sur I, on aura : $[(Fou)(x)]' = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x)$. Ainsi $x \mapsto (Fou)(x)$ est une primitive de $x \mapsto f[u(x)]u'(x)$ sur J, et on a bien :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \int_\alpha^\beta f[u(x)]u'(x)dx = (Fou)(\beta) - (Fou)(\alpha) = F[u(\beta)] - F[u(\alpha)] = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt.$$

(b) Quand $\beta = x$ est variable, la formule donne :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \int_\alpha^x f[u(\xi)]u'(\xi)d\xi = (Fou)(x) - (Fou)(\alpha) = F[u(x)] + \text{ constante.}$$

Autrement dit la fonction $u \mapsto F(u) = \int f(u)du$, prise en $u = u(x)$, est bien une primitive $\int f(u(x))u'(x)dx$ de la fonction $x \mapsto f[u(x)]u'(x)$.

Remarques :

(i) Pour utiliser un changement de variable, on peut partir d'une fonction $g(x)$, considérer une expression $u(x)$ facile à isoler dans g, pour laquelle g s'écrivent $f(u(x))u'(x)$. Reste à calculer l'image des bornes par u et on se ramène ainsi à intégrer f.

(ii) Si $u'(x)$ ne s'isole pas bien dans g, on peut chercher à l'introduire ($g(x) = \frac{g(x)}{u'(x)}u'(x)$) puis à isoler $u(x)$ dans l'expression $\frac{g(x)}{u'(x)}$; de toute façon une notation commode est d'écrire qu'on doit mettre du à la place de $u'(x)dx$: "$du = u'(x)dx$".

(iii) Si on veut partir de $\int_a^b f(u)du$ pour se ramener à une composition $fou(x) = f[u(x)]$, on peut appliquer la formule dans l'autre sens. On remplace alors la fonction $u \mapsto f(u)$ à intégrer par $x \mapsto f[u(x)]u'(x)$, ou "l'intégrande $f(u)du$" par "l'intégrande $f(u(x))u'(x)dx$". Mais il faut pouvoir trouver α, β tels que $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$. C'est pourquoi cette formule est plus pratique, plus facile à appliquer - et justifie mieux son nom de "changement de variable" -, quand u est une bijection de J sur I.

(iv) Dans le même ordre d'idée il est plus facile d'écrire $g(x) = g[u^{-1}(u(x))]\frac{1}{u'[u^{-1}(u(x))]}u'(x)$ et de remplacer $g(x)$ par la fonction $t \mapsto g[u^{-1}(t)]\frac{1}{u'[u^{-1}(t)]}$ quand u est une bijection et $f = gou^{-1}$.

Après, pour calculer des intégrales, la seule ressource qu'on a est de se ramener à des fonctions connues. Des fonctions aussi simples que $x \mapsto e^{-x^2}$ ou $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'ont pas de primitives simples qu'on puisse exprimer avec les fonctions usuelles. Et pourtant ce sont des fonctions qu'on rencontre fréquemment en probabilité ou en application des mathématiques (physique, biologie, économie).

Autant dire que le calcul d'intégrales se borne en général à deux approches :

(1) Fonctions issues de mesures empiriques, dont on pourra estimer les intégrales par des valeurs approchées (ce cas ne se présentera pas en analyse L1) ;

(2) Intégrales qu'on nous donnera en exercice et pour lequel le bienveillant enseignant aura choisi des intégrales qui se ramènent plus ou moins facilement à des primitives connues rappelées dans le tableau ci-dessous. On l'en remerciera, ou, s'il s'avère après de longs calculs qu'il a fait une erreur, on sera en droit de le vouer aux gémonies.

Liste de primitives usuelles :

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, \text{ valable si } x > 0, \alpha \neq -1 \text{ (ou } \alpha \in \mathbb{N}, x \text{ quelconque, ou } \alpha \in \mathbb{Z}^-, x < 0 \text{ ou } x > 0).$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x), \text{ valable si } x > 0, (\text{ sur } \mathbb{R}_-^* \text{ on aura } \int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) = \ln|x|).$$

$$\int e^x dx = e^x, \text{ valable sur } \mathbb{R}, (\text{et aussi si } a > 0, a \neq 1 : \int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x).$$

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)dx = a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + ... + a_1\frac{x^2}{2} + a_0 x, \text{ valable sur } \mathbb{R}.$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x), \quad \int \sin(x)dx = -\cos(x), \text{ valables sur } \mathbb{R}.$$

On retiendra aussi les formules suivantes, qui expriment des exemples courants et simples de changements de variables :

$$\int u'(x).u^n(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}, \text{ et plus généralement si } u(x) > 0 \text{ (et } \alpha \neq -1) : \int u'(x).u^\alpha(x)dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}.$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(|u(x)|), \text{ valable sur tout intervalle où } u(x) \text{ ne s'annule pas.}$$

$$\int u'(x).u(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x), \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}dx = 2\sqrt{u(x)}, \text{ cas particuliers de la première formule.}$$

$$\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)}, \int u'(x)\cos(u(x))dx = \sin(u(x)), \int u'(x)\sin(u(x))dx = -\cos(u(x)).$$

À utiliser aussi sans erreur :

$$\int f(x)dx = \lambda. \int f(\lambda.t + \mu)dt \text{ avec } t = \frac{x-\mu}{\lambda},$$

ou, plus précisément :

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda \int_{\frac{a-\mu}{\lambda}}^{\frac{b-\mu}{\lambda}} f(\lambda.t + \mu)dt, \text{ valable pour tout } \mu \in \mathbb{R}, \text{ et tout } \lambda \neq 0.$$

On notera aussi que les dérivées : $Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $Arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, donnent des formules de primitives.

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = Arctan(x), \text{ et } \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx = Arctan[u(x)].$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsin(x), \text{ et } \int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}dx = Arcsin[u(x)].$$

Bien sûr, une telle intégrale se présente déjà sous une forme "biscornue", et on est plus souvent confrontés à :

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}Arcsin(x), \text{ comme on le voit en dérivant.}$$

On retiendra aussi l'intégration par parties suivante, d'usage courant :

$$\int f(x)dx = x.f(x) - \int x.f'(x)dx, \text{ qu'on obtient en considérant que } 1 = (x)'.$$

C'est cette astuce qui permet de mener à bien de nombreux calculs usuels :

$$\int \ln(x)dx = x.\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x.\ln(x) - \int 1.dx = x.\ln(x) - x \ ;$$

C'est aussi ainsi qu'on peut calculer :

$$\begin{aligned}
F(x) = \int \sqrt{1-x^2}dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x[\sqrt{1-x^2}]'dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{\sqrt{1-x^2}^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + Arcsin(x) \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + Arcsin(x) \\
&= x\sqrt{1-x^2} - F(x) + Arcsin(x),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne bien :

$$2F(x) = x\sqrt{1-x^2} + Arcsin(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2} + Arcsin(x)].$$

Fractions rationnelles.

Pour calculer des primitives des fonctions rationnelles, c'est-à-dire des quotients de polynômes, $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, on commence par décomposer f en somme de fonctions plus simples à intégrer. On appelle cela la décomposition en éléments simples de f. Notons qu'il est aussi plus simple de dériver une somme de fonctions simples qu'un grand quotient, et que cette décomposition peut être utile même pour simplement dériver.

Propriété de décomposition 1 - partie entière d'une fraction rationnelle : Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, il existe un unique couple (E, R) de polynômes tels que : (a) $f(x) = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$; (b) $deg(R) < deg(Q)$.

Preuve : L'égalité équivaut à $P(x) = E(x)Q(x) + R(x)$ avec $deg(R) < deg(Q)$, autrement dit on a fait la division euclidienne de P par Q, et cela donne bien un reste ($= R(x) =$) et un quotient ($= E(x)$) uniques.

Propriété de décomposition - décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle : Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, avec $deg(P) < deg(Q)$, et si :

$$Q(x) = (x - a_1)^{p_1} ... (x - a_n)^{p_n} .(x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1} ... (x^2 + b_m.x + c_m)^{q_m}$$

est la décomposition de Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$, alors on peut, d'une manière unique, décomposer $f(x)$ en somme d'éléments simples de deux types :

(*) des quotients $\dfrac{A}{(x - a_i)^p}$ avec $p \leq p_i$;

(*) des quotients $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + b_j.x + c_j)^q}$ avec $q \leq q_j$;

De plus, si la fraction est <u>*non simplifiable*</u>, les termes de "puissances maximales" : $\dfrac{A}{(x - a_i)^{p_i}}, \dfrac{Bx + C}{(x^2 + b_j.x + c_j)^{q_j}}$, sont non nuls.

Preuve : Si Q est fixé, l'ensemble des fractions $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $deg(P) < deg(Q)$, est un espace vectoriel, isomorphe à l'espace des polynômes de degrés $< deg(Q)$. C'est donc un espace vectoriel de dimension $deg(Q)$.
On a $deg(Q) = p_1 + ... + p_n + 2(q_1 + ... + q_m)$, et les fractions correspondant aux éléments simples proposés sont au nombre de :

(*) $p_1 + ... + p_n$ pour la première forme, à savoir :

$$\frac{1}{x - a_1}, \frac{1}{(x - a_1)^2}, ..., \frac{1}{(x - a_1)^{p_1}}, \frac{1}{(x - a_2)}, ..., ..., \frac{1}{x - a_n}, ..., \frac{1}{(x - a_n)^{p_n}}.$$

(*) $2(q_1 + ... + q_m)$ pour la deuxième forme, à savoir :

$$\frac{1}{x^2 + b_1.x + c_1}, \frac{1}{(x^2 + b_1.x + c_1)^2}, ..., \frac{1}{(x^2 + b_m.x + c_m)^{q_m}} \text{ et } \frac{x}{x^2 + b_1.x + c_1}, \frac{x}{(x^2 + b_1.x + c_1)^2}, ..., \frac{x}{(x^2 + b_m.x + c_m)^{q_m}}.$$

Il suffit donc de prouver que ces fractions sont libres pour qu'elles forment une base de l'espace considéré, et pour pouvoir conclure que la décomposition existe et est unique.
On va prouver ceci par récurrence sur $N = deg(Q) = p_1 + ... + p_n + 2(q_1 + ... + q_m)$.

<u>**Etape 1 :**</u> Si $N = 1$, $Q(x) = X - a$ et le seul élément simple est $\dfrac{1}{X - a}$ qui a lui tout seul est une famille libre puisqu'il est non nul.

<u>**Etape 2 :**</u> Supposons la propriété vraie pour toute famille d'au plus $N - 1 \geq 1$ éléments simples correspondant à un polynôme Q de degré $\leq N - 1$. Montrons qu'alors elle reste vraie pour un Q de degré N. Il faut montrer que si une somme $\displaystyle\sum_i \frac{A_{i,p}}{(x - a_i)^p} + \sum_j \frac{B_{j,q}x + C_{j,q}}{(x^2 + b_j.x + c_j)^q}$ est nulle, alors tous les $A_{i,p}$, les $B_{j,q}$ et les $C_{j,q}$ sont nuls.
Deux cas se présentent :

(*) Supposons que $Q(x) = (x - a_1)^{p_1} ...$ ait au moins un facteur irréductible d'ordre 1. La somme s'écrit donc :

$$\frac{A}{(x - a_1)^{p_1}} + ... = 0$$

ce qui entraîne, en multipliant les membres de cette égalité par $(x - a_1)^{p_1}$:

$$A + (x - a_1)^{p_1}[...] = 0$$

la produit avec le terme entre crochet regroupe des produits en $(x - a_1)^{p_1} \dfrac{1}{(x - a_1)^p} = (x - a_1)^{p_1 - p}$ avec $p_1 > p$, ou des produits $(x - a_1)^{p_1} g(x)$ avec des fractions qui n'ont rien à voir avec $x - a_1$. On a donc une égalité entre fractions définies en a_1, et presque toutes nulles si $x = a_1$. On peut faire $x = a_1$, on obtient :

$$A + 0 + 0 + ... = 0 \Rightarrow A = 0$$

Dans ce cas on a prouvé qu'un des coefficients correspondant à une puissance maximale d'un des éléments simples est nul, on est donc ramené à un $Q(x)$ de degré $N-1$, et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que tous les autres coefficients sont nuls.

(*) Supposons que $Q(x) = (x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}...$ n'ait que des facteurs irréductibles d'ordre 2. La somme s'écrit donc :

$$\frac{B.x + C}{(x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}} + ... = 0$$

ce qui entraîne, en multipliant les membres de cette égalité par $(x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}$:

$$Bx + C + (x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}[...] = 0$$

la produit avec le terme entre crochet regroupe des produits en $(x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}\dfrac{1}{(x^2 + b_1.x + c_1)^{q}} = (x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1 - q}$ avec $q_1 > q$, ou des produits $(x^2 + b_1.x + c_1)^{q_1}g(x)$ avec des fractions qui n'ont rien à voir avec le facteur irréductible $x^2 + b_1.x + c_1$. On a donc une égalité entre fractions définies, y compris sur les racines complexes non réelles conjuguées de $x^2 + b_1.x + c_1$, pusique ce dernier n'est plus un dénominateur. Notons ces racines $\zeta, \overline{\zeta}$. On peut faire $x = \zeta$, et $x = \overline{\zeta}$, on obtient :

$$B\zeta + C + 0 + 0 + ... = 0 \Rightarrow B\zeta + C = 0$$

les autres fractions sont bien calculables puisqu'on sait que ζ n'est racine d'aucun autre polynôme irréductible d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$. En outre $\mathcal{I}m(\zeta) \neq 0$, donc :

$$B\zeta + C = 0 \text{ et } B, C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow B = C = 0.$$

On a encore prouvé qu'un des termes correspondant à une puissance maximale d'un des éléments simples est nul, on est donc ramené à un $Q(x)$ de degré $N-2$, et l'hypothèse de récurrence permet de conclure que tous les autres termes sont nuls.

La récurrence est donc achevée, et la décomposition existe et est unique dans tous les cas.

Maintenant, si un des termes de dénominateurs de puissances maximales disparaît, en factorisant, on trouvera un dénominateur de degré plus petit que Q. Par exemple si le terme $\dfrac{1}{(x-a_1)^{p_1}}$ disparaît, en refactorisant la décomposition, on trouve comme dénominateur un produit $(x-a_1)^p(...)$ avec $p < p_1$, et donc une égalité du type :

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{p_1}(...)} = \frac{(...)'}{(x-a_1)^p(...)''}$$

qui prouve que la fraction de départ $f(x)$ était, en fait, simplifiable.

Donc, si on suppose la fraction non simplifiable, les termes de degrés maximaux sont non nuls.

Par ce théorème, on peut calculer les primitives de n'importe quelles fraction rationnelle si on sait calculer celle des éléments simples.

Primitives des éléments simples, cas les plus courants :

$$\text{(*) Première forme : } \int \frac{1}{x-a}dx = \ln(|x-a|), \int \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{-1}{p-1}\frac{1}{(x-a)^{p-1}}.$$

$$\text{(*) Deuxième forme : } \int \frac{1}{x^2+1}dx = Arctan(x), \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

(*) Dénominateur en $x^2 + b_1.x + c_1 = (x + \frac{b_1}{2})^2 + \frac{4c_1 - b_1^2}{4} = K(u^2+1)$

avec $K = \frac{4c_1 - b_1^2}{4} = -\frac{\Delta}{4}, u = \frac{x + \frac{b_1}{2}}{\sqrt{K}}$ *:*

on se ramène aux précédentes par ce changement de variable $x \leftrightarrow u$.

Pour le reste, les intégrales $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^q}dx$ se traitent directement en remarquant (comme ci-dessus pour $q = 1$) que $(x^2+1)' = 2x$, et que $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u^p(x)}dx = \frac{-1}{p-1}\frac{1}{u^{p-1}(x)}$, quant aux intégrales $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^q}dx$, on peut les calculer de proche en proche depuis $q = 1$ par des intégrations par parties, et on laissera le lecteur s'y entraîner. De toute façon, il faut un dénominateur au minimum de degré 4, morceau de choix que l'on ne rencontre que pour les grandes occasions : réveillons, mariages, exceptionnellement examen terminal du $L1$.

De toute façon, pour s'imprégner convenablement de ces outils de calculs, il faut surtout les utiliser dans de nombreux exercices, aussi, comme on dit : "Y a plus qu'à..."

Appendice : fonctions hyperboliques.

On introduit les fonctions suivantes $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$, appelées respectivement cosinus, sinus et tangente hyperboliques. Ce sont des outils de calcul important, et il convient de les connaître, même si les assertions suivantes ne seront pas justifiées, les calculs étant laissés au lecteur.

Propriété des fonctions hyperboliques :
Les fonctions hyperboliques sont définies sur $\mathbb{R}$. Le cosinus hyperbolique est une fonction paire, croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_-$, les fonctions tangente et sinus hyperboliques sont des bijections impaires strictement croissantes de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

On peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ch(x) + sh(x) = e^x, \quad ch(x) - sh(x) = e^{-x}, \quad th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1, \quad ch(x) \geq 1 \text{ avec égalitée ssi } x = 0, \quad sh(x), th(x) \text{ et } x \text{ sont de même signe.}$$

On a en outre les formules de "trigonométrie hyperbolique" :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y), sh(x+y) = sh(x)ch(y) + sh(y)ch(x), th(x+y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)th(y)}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 1 + 2sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1, sh(2x) = 2sh(x)ch(x), th(2x) = \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)}.$$

Ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch'(x) = sh(x), \quad sh'(x) = ch(x), th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x),$$

$$\text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad ch^{(2n)}(x) = sh^{(2n+1)}(x) = ch(x), \quad ch^{(2n+1)}(x) = sh^{(2n)}(x) = sh(x).$$

Ce qui donne les polynôme de Taylor suivant en 0 :

$$C(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ à l'ordre } 2n \text{ pour le cosinus hyperbolique,}$$

$$S(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ à l'ordre } 2n+1 \text{ pour le sinus hyperbolique.}$$

Ces trois fonctions étant des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$ pour sh et th, et étant une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$ pour la restriction du ch aux $x \geq 0$, ont des bijections réciproques, nommées argument sinus hyperbolique, argument tangente hyperbolique, et argument cosinus hyperbolique, et notées $Argsh, Argth$ et $Argch$ respectivement.
Ce sont des fonctions strictement croissantes et indéfiniment dérivables, impaires, et bijectives : sur $\mathbb{R}$ pour $Argsh$, sur $]-1,1[$ pour $Argth$, sur $[1,+\infty[$ pour $Argch$.

On a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, Argsh'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \forall y \in]-1,1[, Argth'(y) = \frac{1}{1-y^2}, \quad \forall y > 1, Argch'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

En réalité, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions circulaires, on peut trouver une formule "explicite" pour ces fonctions :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad Argsh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \ ;$$

$$\forall y \geq 1, \quad Argch(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) = -\ln(y - \sqrt{y^2-1}) \ ;$$

$$\forall y \in]-1,1[, \quad Argth(y) = \frac{1}{2}[\ln(1+y) - \ln(1-y)] = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}).$$

On voit donc comment enrichir notre bibliothèque de primitives avec ces nouvelles fonctions :

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} dy = Argsh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}), \text{ et donc :}$$

$$\int \sqrt{1+y^2} dy = \frac{1}{2}[Argsh(y) + y\sqrt{1+y^2}] = \frac{1}{2}[\ln(y + \sqrt{y^2+1}) + y\sqrt{1+y^2}],$$

et :

$$\text{Si } y \geq 1, \int \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} dy = Argch(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}), \text{ et donc :}$$

$$\int \sqrt{y^2-1} dy = \frac{1}{2}[-Argch(y) + y\sqrt{y^2-1}] = \frac{1}{2}[\ln(y - \sqrt{y^2-1}) + y\sqrt{y^2-1}].$$