Fiche de cours 4 - Dérivées des fonctions et applications.

Dérivée première.

Définition :

(i) Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f est dérivable en a si la limite :

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est un réel. On la nomme alors le nombre dérivé de f en a, et on la note $f'(a)$.

(ii) Cette définition s'adapte dans les cas où la limite existe à gauche, à droite, et on parle alors de dérivée à gauche $f'(a^-)$ ou $f'_g(a)$, et de dérivée à droite, $f'(a^+)$, $f'_d(a)$.

(iii) Si la dérivée existe en tout point d'un intervalle I, on dit que la fonction f est dérivable *sur* I, et on définit ainsi une nouvelle fonction, la fonction dérivée, f'.

Remarques :

(1) Si la fonction n'est pas continue en a, par exemple si la fonction n'est pas continue à droite, $f(x)-f(a)$ peut avoir une limite non nulle $\ell \in \mathbb{R}^* \cap \{-\infty, +\infty\}$ à droite, ou pas de limite du tout. Dans le premier cas la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \equiv$ "$\dfrac{\ell}{0^+}$" **est alors infinie, avec un signe dépendant de ℓ : DONC DANS CE CAS LA DÉRIVÉE N'EXISTE PAS**.

(2) Si $f(x)-f(a)$ n'a pas de limite en a, **LA DÉRIVÉE N'EXISTE PAS NON PLUS :** sinon on aurait une limite nulle pour : $(f(x)-f(a)) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \to f'(a).0 = 0$.

(3) Reste donc **le seul cas où la question a un sens, le cas où la fonction f est continue en a.** Que signifie alors l'existence de la dérivée ? La limite étudiée est une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$", et l'existence des dérivées signifie qu'on peut lever ces indéterminations. D'où l'apport de l'usage des dérivées et plus tard des développements limités pour étudier des limites compliquées.

Calcul des dérivées :

Propriété (dérivées et développement limité) :

(1) Une fonction définie sur un intervalle I est dérivable en un point $a \in I$ si et seulement si on peut trouver deux réels A et B, et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, tels que : $\forall x \in I, f(x) = A + B(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

(2) Si les conditions du (1) sont réalisées, on a $A = f(a), B = f'(a)$.

Preuve :

Si la fonction est dérivable, posons pour $x \neq a, x \in I$:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), \text{ et } \varepsilon(a) = 0.$$

Alors par définition de la dérivée, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, et par définition de ε, on a :

$$\varepsilon(x).(x-a) = (f(x)-f(a)) - f'(a)(x-a) \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a).$$

Réciproquement, si A, B et ε existent, l'égalité proposée pour $x = a$ donne :

$$f(a) = A + B.0 + 0.\varepsilon(a) \Rightarrow A = f(a).$$

Donc, si $x \neq a$, on trouve :

$$f(x) = f(a) + B(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \Rightarrow f(x)-f(a) = (B+\varepsilon(x))(x-a) \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = B + \varepsilon(x).$$

Ainsi l'hypothèse faite sur ε entraîne que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite égale à $B+0 = B$ quand $x \to a$, c'est-à-dire que f a une dérivée égale à B en a.

Propriété (opérations) : si f, g sont deux fonctions définies au voisinage du point a, alors :

(1) Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha.f(x) + \beta.g(x)$ est dérivable en a, de dérivée :
$$\alpha.f'(a) + \beta.g'(a).$$

(2) La fonction produit $x \mapsto f(x).g(x)$ est dérivable en a, de dérivée :
$$f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) Si $g(a) \neq 0$, la fonction quotient $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$, est définie au voisinage de a et dérivable en a, avec :
$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}.$$

(4) On retiendra les formules qui en résultent sur un intervalle :
$$(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g' \ ; \ (f.g)' = f'.g + f.g' \ ; \ (\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}, \text{ si } g \text{ ne s'annule pas.}$$

Preuve : On part des deux développements limités de f et g au voisinage de a.
$$f(x) = A + B(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \text{ et } g(x) = C + D(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a).$$
On aura alors :
$$\alpha.f(x) + \beta.g(x) = (\alpha.A + \beta.C) + (\alpha.B + \beta.D)(x-a) + \eta(x)(x-a),$$
$$\text{et : } f(x)g(x) = AC + (AD + BC)(x-a) + \delta(x)(x-a), \text{ avec :}$$
$$\eta(x) = \alpha.\varepsilon_1(x) + \beta.\varepsilon_2(x), \delta(x) = [A + B(x-a)]\varepsilon_2(x) + [C + D(x-a)]\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(x).\varepsilon_2(x) + BD(x-a).$$
qui tendent respectivement vers :
$$\alpha.0 + \beta.0 = 0 \text{ et } [A + B.0].0 + [C + D.0].0 + 0.0 + BD.0 = 0 \text{ quand } x \to a.$$
Pour le quotient, on commence par faire la division des polynômes, mais pas la division euclidienne, la division "suivant les puissances croissantes", en remarquant que par hypothèse, dans ce cas, $C = g(a) \neq 0$:
$$\begin{aligned}
A + B(x-a) &= \frac{A}{C}(C + D(x-a)) - \frac{A}{C}D(x-a) + B(x-a)\\
&= \frac{A}{C}(C + D(x-a)) + \frac{BC - AD}{C}(x-a)\\
&= \frac{A}{C}(C + D(x-a)) + (x-a)\frac{BC - AD}{C^2}(C + D(x-a)) - \frac{BC - AD}{C^2}D(x-a)^2\\
&= [\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2}(x-a)](C + D(x-a)) - \frac{BCD - AD^2}{C^2}(x-a)^2
\end{aligned}$$
En remarquant que $A + B(x-a) = f(x) - (x-a)\varepsilon_1(x), C + D(x-a) = g(x) - (x-a)\varepsilon_2(x)$, on obtient :
$$f(x) - (x-a)\varepsilon_1(x) = \left[\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2}(x-a)\right](g(x) - \varepsilon_2(x)(x-a)) - \frac{BCD - AD^2}{C^2}(x-a)^2$$
D'où : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{BC - AD}{C^2}(x-a) + (x-a)\lambda(x)$, avec une sympathique expression de :
$$\lambda(x) = \frac{\varepsilon_1(x)}{g(x)} - \varepsilon_2(x)(\frac{1}{g(x)})[\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2}(x-a)] - \frac{BCD - AD^2}{g(x)C^2}(x-a),$$
qui tend avec bonheur vers :
$$\frac{0}{g(a)} - 0(\frac{1}{g(a)})[\frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C^2}.0] - \frac{BCD - AD^2}{g(a)C^2}.0 = 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } a.$$

Exemple : La dérivée d'une fonction linéaire $x \mapsto A.x + B$ est la constante $x \mapsto A$. On en déduit que la dérivée de la fonction $x \mapsto (x - x_0)^n$ est la fonction $x \mapsto n.(x - x_0)^{n-1}$, et que celle d'un polynôme $P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_n.x^n$ est le polynôme $P'(x) = a_1 + 2a_2.x + 3a_3.x^2 + ... + na_n.x^{n-1}$.

Preuve : Le taux d'accroissement d'une fonction affine entre deux réels x et y est :$\dfrac{(A.x + B) - (A.y + B)}{x - y} = A\dfrac{x - y}{x - y} = A$, la dérivée est donc bien la constante égale à A.
En appliquant la formule donnant la dérivée d'un produit on voit par récurrence sur n que la dérivée de $x \mapsto (x - x_0)^n$ est bien la fonction indiquée, et la linéarité de la dérivation permet de conclure pour les polynômes.

Propriété (composition d'applications et dérivées) :

(1) Soient f définie sur un intervalle I contenant a, et g définie sur un intervalle J contenant $f(a) = b$, telle que gof soit définie sur I. Si f est dérivable en a, et si g est dérivable en $f(a) = b$, alors gof est dérivable en a et $(gof)'(a) = f'(a).g'(b) = f'(a).g'[f(a)]$.

(2) Si f est une bijection d'un intervalle I sur l'intervalle J, dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, de dérivée $\dfrac{1}{f'(a)}$, c'est-à-dire que $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Preuve : On partira du D.L. de $f(x) = b + T(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$, avec $b = f(a), T = f'(a)$.
Dans la première formule, on a en plus le DL de g au point b :

$$g(y) = U + V(y-b) + (y-b)\varepsilon_2(y),$$

ce qui donne en remplaçant y par $f(x)$:

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= U + V(f(x)-b) + (f(x)-b)\varepsilon_2(f(x)) \\ &= U + V[T(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)] + [T(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)]\varepsilon_2(f(x)) \\ &= U + VT(x-a) + (x-a)\mu(x), \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$\mu(x) = V\varepsilon_1(x) + (T + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x)),$$

qui tend vers 0 comme on le vérifie en notant que f étant continue en a, $\varepsilon_2(f(x))$ tend vers la limite de $\varepsilon_2(y)$ pour $y \to b = f(a)$, c'est-à-dire vers 0.

Pour la deuxième formule, posons pour un $y \in J$, $x = f^{-1}(y) \in I$, on trouve :

$$\begin{aligned} & y = b + T(f^{-1}(y) - a) + (f^{-1}(y) - a)\varepsilon_1(f^{-1}(y)) \\ & \Rightarrow y - b = [T + \varepsilon_1(f^{-1}(y))](f^{-1}(y) - a) \\ & \Rightarrow (f^{-1}(y) - a) = \frac{y-b}{T + \varepsilon_1(f^{-1}(y))} \\ & \Rightarrow f^{-1}(y) = a + \frac{y-b}{T + \varepsilon_1(f^{-1}(y))} = a + \frac{1}{T}(y-b) + \nu(y)(y-b) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \nu(y) = \frac{1}{T + \varepsilon_1(f^{-1}(y))} - \frac{1}{T} = -\frac{\varepsilon_1(f^{-1}(y))}{T(T + \varepsilon_1(f^{-1}(y)))} \to -\frac{0}{T(T+0)} = 0.$$

Interprétation géométrique de la dérivée.

Si $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ sont deux points du plan d'abscisses distinctes, le nombre :

$$T = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{"}\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{"}$$

est la pente p de l'unique droite d'équation : $y = p.x + C$, qui passe par A et B. Ce nombre est aussi la tangente de l'angle $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{AB})$.

Si $A = M_0(a, f(a))$ et $B = M(x, f(x))$ sont deux points de la courbe de f, la droite (AM) est la *sécante* à la courbe menée des points A et M, et le rapport :

$$T(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

qui est donc la pente de la droite (AM), est aussi le taux d'accroissement de f entre a et x.

Ainsi, la direction de la droite (AM) tend vers une "position limite" si et seulement le rapport $T(x)$ tend vers un nombre limite, et on en déduit :

Propriété : Une fonction f est dérivable au point a si et seulement si la courbe de f admet une tangente au point $M_0(a, f(a))$. Si c'est le cas, l'équation de cette tangente est :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \text{ ou encore : } y = f'(a).x + f(a) - a.f'(a).$$

Accroissements finis et applications (monotonie, signe de la dérivée, ...)

La dérivée étant la limite d'un taux d'accroissement, il semble naturel de mettre en rapport le comportement de f et les valeurs de sa dérivée :

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un point $a \in I$.

(1) Si f est définie sur un intervalle $[a, b]$ avec $b > a$ et si $f(a) \leq f(x)$ sur $[a, b]$, alors $f'(a) \geq 0$; De même si f est définie sur $[b, a]$ avec $b < a$ et si $f(x) \leq f(a)$ sur $[b, a]$, on a $f'(a) \geq 0$. On peut énoncer les mêmes règles en inversant le sens des inégalités (par exemple si $f(a) \geq f(x)$ sur $[a, b]$, alors $f'(a) \leq 0$).

(2) Si f est croissante sur I, alors $f'(a) \geq 0$. De même si f est décroissante sur I, $f'(a) \leq 0$.

(3) Si f a un maximum local en a, c'est-à-dire s'il y a $[b, c]$ avec $b < a < c$ tel que $x \in [b, c] \Rightarrow x \in I$ et $f(x) \leq f(a)$, alors $f'(a) = 0$. De même si f a un minimum local en a, $f'(a) = 0$.

Preuve :

(1) Les conditions proposées entraînent que les taux d'accroissements de f sont positifs dans un petit voisinage de a, à gauche (2e cas) ou à droite (1e cas). Conclusion : la limite $f'(a)$ est aussi positive.

(2) Si f est croissante les conditions du (1) sont remplies donc $f'(a) \geq 0$.

(3) Si f a un maximum local en a, on aura à la fois $f(x) \leq f(a)$ sur $[b, a]$ et $f(x) \leq f(a)$ sur $[a, c]$. D'après le (1) cela implique à la fois $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, donc $f'(a) = 0$.

Cette propriété ne suffit pas à assurer qu'on puisse étudier les fonctions en se contentant de trouver le signe de la dérivée : il faudrait disposer d'une réciproque (si f' est positive, alors f est croissante).

Il est commode de séparer en plusieurs étape ce lien entre valeurs de la dérivée et comportement de f, en commençant par un cas simple, assurant que certaines valeurs de f' existent obligatoirement sous des conditions simples pour f :

Théorème de Rolle : Soient a, b deux réels, tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : f étant continue sur $[a, b]$, l'image de $[a, b]$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$, les réels m (minimum) et M (maximum) étant des valeurs atteintes par f. On a alors deux cas :

(i) $m = M$, ce qui signifie que l'image de f est $[m, M] = [m, m] = \{m\}$, donc que f est constante. Alors les taux d'accroissements sont nuls, et *toutes* les valeurs de $f'(c)$ sont nulles.

(ii) $m < M$. Danc ce cas, comme $f(a) = f(b)$, il y a au moins une des deux valeurs m, M, qui est atteinte à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$, en un point c où f a donc un minimum ou un maximum local. D'après la propriété précédente, on a bien $f'(c) = 0$.

Ce résultat, décliné avec un peu d'astuce, permet de mettre en relation les valeurs des taux d'accroissements et les valeurs de la dérivée dans de nombreux cas. Il exprime que les valeurs de f' ne s'éloignent *"pas trop"* de celles du taux d'accroissement, donc une hypothèse sur les valeurs de f' (elles sont positives, négatives, etc.) aura des conséquences sur les valeurs du taux d'accroissement et donc sur le comportement de f.

Théorème des accroissements finis : Si $a < b$, et si f est une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve : On choisit un réel μ de tel sorte que la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - \mu.x$ vérifie $g(a) = g(b)$. Cela correspond à :

$$f(a) - \mu.a = f(b) - \mu.b \iff \mu = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cette fonction auxiliaire est comme f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, donc le théroème de Rolle s'applique : il y a $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, et comme pour tout x : $g'(x) = f'(x) - \mu$, ce réel c vérifie bien :

$$f'(c) = \mu = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Application 1 :

(a) Soit une fonction f qui soit dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, continue sur $[a, b]$, et telle que $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[$. On a alors $f(b) \geq f(a)$. Si on a $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$, on a $f(b) > f(a)$.

(b) Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I ; si $f'(x) \geq 0$ sur I, f est croissante.

(c) Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I ; si $f'(x) > 0$ sur I, f est strictement croissante ; si $f'(x) > 0$ sur I sauf pour un nombre fini de valeurs $a_1 < a_2 < ... < a_n$

où $f'(a_i) = 0$, f est strictement croissante sur I.

(d) On a les mêmes résultats pour f' négative et f décroissante.

Preuve : (a) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est une valeur de la dérivée donc est positif, voire strictement positif, suivant les hypothèses faites sur f'. On en déduit, puisque $b - a > 0$, que c'est $f(b) - f(a)$ qui est positif ou strictement positif.

(b) Il suffit d'appliquer (a) pour tout couple $a, b \in I$. On obtient que si $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.

(c) Si $f'(x) > 0$, le (a) entraîne $f(a) < f(b)$ pour tout couple a, b tel que $a < b$. Mais, avec les hypothèses supplémentaires, comme seules les valeurs de f' *à l'intérieur de* $]a, b[$ jouent, on voit que f sera *strictement* croissante sur $]-\infty, a_1] \cap I$, puis sur $[a_1, a_2]$, puis sur $[a_2, a_3]$, etc. Ceci implique que f est strictement croissante sur tout I : si $a < b$, soit a, b sont dans le même petit intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ où f est strictement croissante et dans ce cas $f(a) < f(b)$, soit il y a un des a_i entre a et b, et dans ce cas $f(a) < f(a_i)$ grâce à la croissance stricte sur $[a_{i-1}, a_i]$, et $f(a_i) < f(b)$ grâce à la croissance stricte sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Remarque : On pourra s'entraîner à ces raisonnements en prouvant qu'en fait on a :

$$f \text{ strictement croissante sur } I$$
$$\Longleftrightarrow$$

(i) $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$, et : (ii) l'ensemble des réels x tels que $f'(x) > 0$ est dense dans I.

Application 2 :

(a) Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$; si $m \leq f'(c) \leq M$ sur $]a, b[$, alors :

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M \text{ ("Inégalité des accroissements finis").}$$

(b) Si f est dérivable sur I, et si on a un réel k tel que : $|f'(x)| \leq k$ sur I, alors on aura, pour tous $x, y \in I$:

$$|f(y) - f(x)| \leq k.|x - y|.$$

(c) Si les hypothèses du (b) sont satisfaites avec en plus : (i) l'intervalle I est fermé ; (ii) $k \in [0, 1[$; (iii) $f(I) \subseteq I$, c'est-à-dire : $\forall x \in I, f(x) \in I$, on aura la propriété suivante :
Pour tout $x_0 \in I$, la suite définie par les conditions :

$$u_0 = x_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n),$$

est bien définie, et converge vers un réel $\alpha \in I$. De plus α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans I.

Preuve :

(a) Vient du T.A.F.

(b) Application du (a) à n'importe quelle paire de points $x, y \in I$, l'hypothèse signifiant que $-k \leq f' \leq k$.

(c) La condition (iii) assure que la suite est bien définie (on reste dans le domaine de définition de f) et la condition (i) assure que si u_n converge vers α, alors $\alpha \in I$ puisque ce sont des inégalités larges qui définissent I, et que des inégalités larges "passent à la limite".

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers α, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donnera, en passant à la limite :

$$\alpha = f(\alpha)$$

(calcul valable car f est continue puisque dérivable).

Reste à prouver que la suite converge, et que l'équation $f(x) = x$ n'a qu'une solution.

Tout repose sur l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq k.|x - y|$ avec $0 \leq k < 1$. Si x et y vérifient $f(x) = x, f(y) = y$, cette inégalité devient :

$$|x - y| \leq k.|x - y| \Rightarrow (1 - k).|x - y| \leq 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Ainsi l'équation $f(x) = x$ n'a pas plus d'une solution, donc α est unique s'il existe.

Maintenant l'inégalité : $|f(y) - f(x)| \leq k.|y - x|$ s'applique à $x = u_n, y = u_{n+1}$ pour un entier n quelconque. Elle devient :

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k.|u_{n+1} - u_n| \iff |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k.|u_{n+1} - u_n|.$$

Si on introduit la suite des différences : $d_n = u_{n+1} - u_n$, on vient donc de prouver que $\forall n, |d_{n+1}| \leq k.|d_n|$. On en tire aisément par récurrence : $\forall n, |d_n| \leq k^n.|d_0|$.

Donc si n, m sont deux entiers avec par exemple $n < m$, on pourra écrire :

$$\begin{aligned}|u_m - u_n| &= |(u_m - u_{m-1}) + (u_{m-1} - u_{m-2}) + ... + (u_{n+2} - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_n)| \\ &= |d_{m-1} + d_{m-2} + ... + d_{n+1} + d_n|\end{aligned}$$

$$\leq |d_{m-1}| + ... + |d_n|$$
$$\leq k^{m-1}.|d_0| + ... + k^n.|d_0|$$
$$= |d_0|.k^n.(k^{m-n-1} + k^{m-n-2} + ... + k + 1)$$
$$= |d_0|.k^n.\frac{1-k^{m-n}}{1-k} < \frac{|d_0|}{1-k}k^n.$$

Cette inégalité prouve que la suite est de Cauchy. En effet comme $k^n \longrightarrow 0$, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un rang N à partir duquel :

$$m > n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| \leq \frac{|d_0|}{1-k}k^n < \varepsilon.$$

Ainsi la suite est nécessairement convergente, ce qui prouve du même coup l'existence de α.

Remarque : ce raisonnement un peu long est illustré par plusieurs exercices de la feuille. C'est un procédé usuel d'approximation.

Dérivées successives et formules de Taylor.

Comme des données sur la dérivée permettent d'obtenir des résultats sur les variations de f, on s'attend à ce que la dérivée de la dérivée, et les fonctions calculées ainsi de suite, permettent d'obtenir des résultats sur les valeurs de f. On définit donc :

Définition - Dérivées successives :

(a) Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la dérivée d'ordre n de f en un point $a \in I$ comme suit : si la dérivée d'ordre $n-1$ est déjà définie sur tout I et notée $f^{(n-1)}$, et qu'elle est dérivable en a, on appelle dérivée n-ème en a le nombre $(f^{(n-1)})'(a)$, qu'on note $f^{(n)}(a)$. On dit alors que f est n fois dérivable en a **(Attention : il faut que f soit $n-1$ fois dérivable sur tout un intervalle pour définir la dérivée n-ème en un point)**.

(b) En résumé on a donc : $f^{(2)} = f'' = (f')'$, $f^{(3)} = (f^{(2)})'$, ... , $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, ...

(c) Si f est n fois dérivable sur tout l'intervalle I, et si $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est de classe C^n sur I.

(d) Si $f^{(n)}$ existe pour tout n sur I, on dit que f est indéfiniment dérivable ou de classe C^∞ sur I.

Calcul des dérivée n-ème :

(1) Si f, g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, toute combinaison linéaire de f et g, le produit $f.g$, sont n fois dérivables. De plus si g ne s'annule pas sur I, le quotient f/g est défini et n fois dérivable. On a de plus pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $(\alpha.f + \beta.g)^{(n)} = \alpha.f^{(n)} + \beta.g^{(n)}$.

(2) Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables, gof est n fois dérivable.

(3) Si f est une bijection n fois dérivable de I sur J et si f' ne s'annule pas sur I, alors la réciproque f^{-1} est n fois dérivable.

Preuve : Essayez un peu de vous débrouiller tous seuls !

Exemple : La dérivée n-ème de la fonction $F_p(x) = (x-a)^p$ est :

$$F_p^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-(n-1))(x-a)^{p-n} = \frac{p\,!}{(p-n)!}(x-a)^{p-n} \text{ si } n < p \;;$$
$$F_p^{(p)}(x) = p\,! \text{ si } n = p \;;$$
$$F_p^{(n)}(x) = 0 \text{ si } n > p.$$

Preuve : par récurrence sur n.

Pour comparer une fonction et les valeurs de ses dérivées, on fait l'analogue de ce qu'on avait à l'ordre 1 : on approchait $f(x)$ par la fonction $f(a) + (x-a)f'(a)$, affine, qui a la même valeur et la même dérivée que f en a. On introduit donc le polynôme P de degré qui a la même valeur et les mêmes n premières dérivées que f en a :

Définition : Soit f une fonction n fois dérivable en a. On appelle polynôme de Taylor d'ordre n de f en a le polynôme :
$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

On a alors l'analogue du théorème des accroissements finis :

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange) : Si f est une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, et $(n+1)$-dérivable sur $]a,b[$, alors, en conservant les notations précédentes, il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) = P(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Preuve : On considère la fonction auxiliaire :
$$\begin{aligned} g(x) &= f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - ... - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - A(b-x)^{n+1} \\ &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}. \end{aligned}$$
On a clairement $g(b) = 0$. Par ailleurs :
$$g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - A(b-a)^{n+1} = f(b) - P(b) - A(b-a)^{n+1}.$$
On peut donc choisir une valeur du paramètre A pour avoir aussi $g(a) = 0$, cela correspond à :
$$A = \frac{f(b) - g(b)}{(b-a)^{n+1}}.$$
Les hypothèses faites sur f assurent que chaque fonction $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, donc il en est de même pour g. Par ailleurs :
$$[\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k]' = \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1},$$
ce qui donne tout calcul fait :
$$g'(x) = [\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} - (n+1)A](b-x)^n.$$
Le théorème de Rolle, qui s'applique car $g(a) = g(b) = 0$, assure qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$ et $a < c < b$, donc $(b-c)^n \neq 0$, et donc on a :
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} - (n+1)A = 0 \Rightarrow A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$
ce qui donne la formule voulue, si on se souvient que A avaitété choisi pour vérifier :
$$f(b) - P(b) = A(b-a)^{n+1}.$$

Ce théorème permet d'estimer la différence $f(b) - P(b)$ en un point b fixé. On a un résultat avec moins de conditions pour l'existence d'une simple limite en a :

Théorème (formule de Taylor-Young - existence de développements limités) : Si f est $(n-1)$-fois dérivable sur un voisinage de a, et n-fois dérivable en a, alors, P étant le polynôme de Taylor de degr{e n de f en a, on a :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$$
ce qui s'écrit :
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n]}{(x-a)^n} = 0 \text{ ou :}$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \varepsilon(x).(x-a)^n \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Preuve : Si on pose, sous les hypothèses du théorème, $D(x) = f(x) - P(x)$, on trouve que D est n-fois dérivable avec $D(a) = D'(a) = ... = D^{(n)}(a) = 0$, et il s'agit d'en déduire que $\lim_{x\to a} \frac{D(x)}{(x-a)^n} = 0$.
On prouve ceci par récurrence sur n.

(*) Pour $n = 1$, cela veut dire que, si $D(a) = D'(a) = 0$, on a $\lim_{x\to a} \frac{D(x)}{(x-a)} = 0$. Or ceci est juste la définition de la dérivée (car $D(x) - D(a) = D(x)$ si $D(a) = 0$).

(*) Supposons que la propriété soit vraie *pour toute fonction* qui vérifie les hypothèse à l'ordre $n-1$. Si D vérifie alors $D(a) = D'(a) = ... = D^{(n)}(a) = 0$, on peut remarquer que D' vérifie les hypothèses à l'ordre $n-1$, et donc, par hypothèse de récurrence, on doit avoir $\lim_{x\to a} \frac{D'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x\to a} \frac{D'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que, si $|x-a| < \delta$, on ait :

$$|\frac{D'(x)}{(x-a)^{n-1}}| < \varepsilon \text{ (I)}$$

Soit donc x tel que $|x-a| < \delta$.
On applique le théorème des accroissements finis entre a et x, on a donc un réel c entre a et x tel que :

$$\frac{D(x)}{x-a} = \frac{D(x) - D(a)}{x-a} = D'(c).$$

D'après (I), comme c est entre x et a, on a $|c-a| < |x-a| < \delta$ donc :

$$|\frac{D'(c)}{(c-a)^{n-1}}| < \varepsilon \Rightarrow |D'(c)| < \varepsilon.|c-a|^{n-1} < \varepsilon.|x-a|^{n-1}.$$

On a donc finalement :

$$|\frac{D(x)}{x-a}| = |D'(c)| < \varepsilon.|x-a|^{n-1} \Rightarrow |\frac{D(x)}{(x-a)^n}| < \varepsilon.$$

Comme ceci est valable pour tout x tel que $|x-a| < \delta$, et qu'on peut trouver un tel δ pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit qu'on a bien : $\lim_{x\to a} \frac{D(x)}{(x-a)^n} = 0$. Ceci achève la preuve de la récurrence, et du même coup de la formule de Taylor-Young.

On sait que cette formule est une des bases de la théorie des développements limités, qui explique comment calculer une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point.

Définition : Soit f définie au voisinage du point a et $n \geq 1$ un entier. On appelle développement limité de f à l'ordre n en a un polynôme P de degré $\leq n$ tel que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

ou qu'on puisse écrire :

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n.\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Propriété :

(1) Un développement limité à l'ordre n en a ("$DL_n(a)$"), s'il existe, est unique.

(2) Si f et g ont P et Q pour développement limité à l'ordre n en a, alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha.P + \beta.Q$ est un $DL_n(a)$ de $\alpha.f + \beta.g$.

(3) Un $DL_n(a)$ de $f.g$ est obtenu en calculant le polynôme $P(x)Q(x)$, en l'écrivant en fonction de $(x-a)$ et en supprimant les termes de degrés $\geq n+1$.

(4) Un $DL_n(a)$ du quotient $f(x)/g(x)$ existe si $g(a) \neq 0$, et est obtenu de la manière suivante : on écrit $P(x)$ et $Q(x)$ en fonction de $(x-a)$, *suivant les puissances croissantes*, et on fait la division *suivant les puissances croissantes* de $P(x)$ par $Q(x)$.

(5) Si on a $b = f(a)$ et si $h(y)$ est définie au voisinage de b, et y admet $R(y)$ comme $DL_n(b)$, on obtient un $DL_n(a)$ de hof en écrivant $P(x)$ en fonction de $(x-a)$, puis $R(y)$ en fonction de $(y-b)$, et en ne conservant que les puissances d'ordre $\leq n$ dans la composée $R[P(x)]$.

Preuve :

(1) il faut montrer que deux polynômes de degrés $\leq n$ ne peuvent différer d'une fonction tendant vers 0 fois $(x-a)^n$. Or si P_1, P_2 sont deux tels polynômes distincts, $P_1(x) - P_2(x)$ s'écrit :

$$c(x-a)^p + ... \text{ (avec } c \neq 0\text{, puis des termes de degrés } > p) = (x-a)^p(c + ...),$$

donc $\dfrac{P_1(x) - P_2(x)}{(x-a)^n} = \dfrac{1}{(x-a)^{n-p}}(c + ...)$. La puissance de $x - a$ tend vers $+\infty$ en valeur absolue, ou est égale à 1 si $n = p$, et la parenthèse tend vers $c + 0 + ... = c \neq 0$. La limite ne peut donc être nulle, ce qu'on voulait prouver.

(2)(3)(4)(5) reposent sur le (1) : si le calcul fonctionne, comme le DL est unique, le résultat du calcul est le DL cherché.

Dérivations des fonctions usuelles (1) : aperçu et application de la notion de fonctions convexes.

Le premier pas pour utiliser les notions qu'on vient de développer est de déterminer les dérivées des fonctions usuelles : polynômes, fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances et fonctions circulaires.

On sait d'ailleurs (toujours grâce à notre grande culture) que c'est la dérivation qui particularise, parmi les logarithmes et exponentielles, l'exponentielle et log *népériens.* En effet ce sont les fonctions telles que $\ln'(x) = 1/x, \exp'(x) = \exp(x)$.

Mais, pas de chance, il se trouve qu'il n'est pas évident de vérifier la dérivabilité de ces fonctions. Les choses sont un peu simplifiées si on utilise la notion de fonction convexe.

Définition : Une fonction f définie sur un intervalle I est dites convexe si pour tout couple $x, y \in I$, le segment joignant $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$ est au dessus de la courbe de f.

Propriété : Une fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x, y \in I$, et tout $\lambda \in [0,1]$, on a : $f(\lambda.x + (1-\lambda).y) \leq \lambda.f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Preuve : En effet le segment joignant A et B est l'ensemble des points M de coordonnées $x_M = \lambda.x + (1-\lambda).y$, et $y_M = \lambda..f(x) + (1-\lambda).f(y)$, et donc les inégalités expriment que $f(x_M) \leq y_M$, c'est-à-dire que le point M est au dessus du point $(x_M, f(x_M))$ de la courbe.

Propriété :

(1) Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I. Alors pour tout a, la fonction *pente* : $p : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, est croissante sur l'ensemble $I - \{a\}$.

(2) Sous les hypothèse du (1), la fonction est continue sur I, et dérivable à gauche et à droite en tout point de I. De plus, les fonction f'_g et f'_d sont croissante sur I.

Preuve :

(1) Si $x < a < y$, on sait qu'il existe λ tel que $a = \lambda.x + (1-\lambda).y$, et c'est $\lambda = \dfrac{a-y}{x-y}$, pour lequel $1 - \lambda = \dfrac{x-a}{x-y}$. L'inégalité :

$$f(\lambda.x + (1-\lambda).y) \leq \lambda.f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

donne : $f(a) \leq \dfrac{a-y}{x-y}f(x) + \dfrac{x-a}{x-y}f(y)$

$$\Rightarrow (\frac{x-a}{x-y} + \frac{a-y}{x-y})f(a) \leq \frac{a-y}{x-y}f(x) + \frac{x-a}{x-y}f(y)$$
$$\Rightarrow \frac{x-a}{x-y}(f(a) - f(y)) \leq \frac{a-y}{x-y}(f(x) - f(a))$$
$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y-a}.$$

On peut, en adaptant ce raisonnement aux cas où $x < y < a$ (y écrit en fonction de x et de a), ou $a < x < y$ (x en fonction de a et y), voir qu'on a toujours $p(x) \leq p(y)$.

(2) Comme p est croissante, elle a une limite à gauche et à droite en tout point a, et comme $p(x) \leq p(y)$ si $x < a < y$, les limites à gauche et à droite en a sont finies : ce sont donc les dérivées à gauche et à droite en a. L'existence de ces dérivées entraîne la continuité de f.

Si $a < b$, on a par conséquent :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b).$$

Ceci prouve les assertions sur la monotonie de la dérivée.

Remarque : une fonction convexe a sa courbure tournée vers le haut, comme la parabole $x \mapsto x^2$. De même si $-f$ est convexe, on dit que la fonction est concave, et sa convexité est alors tournée vers le bas.

En étudiant les intervalles où f' et croissante ou décroissante, c'est-à-dire en étudiant le signe de f'', on divise le domaine de définition en endroit où la courbure est tournée vers le haut où le bas, et là où la courbure change de sens, la tangente traverse la courbe, on observe un point d'inflexion.

Ces remarques permettent souvent de préciser l'allure des courbes.

Propriété :

(1) Pour tout $a > 0$, la fonction $x \mapsto a^x$ est convexe et dérivable, de plus sa dérivée est la fonction $x \mapsto L(a).a^x$ où $L(a)$ est la dérivée en $x = 0$. De plus L est une fonction logarithme, le logarithme népérien, notée ln, dont la base e vérifie $1 < e$.

(2) La dérivée de $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$ elle-même, et la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ est la fonction inverse $x \mapsto x^{-1}$. Enfin pour tout $a > 0, a \neq 1$ on a :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \log'_a(x) = \frac{1}{x.\ln(a)}, (a^x)' = \ln(a).a^x.$$

Preuve :

(1) Il s'agit de prouver que $a^{\lambda.x+(1-\lambda).y} \leq \lambda.a^x + (1-\lambda).a^y$.
On remarque d'abord que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*, x > 0$, on a :

$$n.x^m + \frac{m}{x^n} \geq n + m.$$

En effet si on pose $F(x) = n.x^m + \dfrac{m}{x^n}$, on a :

$$\forall x > 0, F'(x) = n.m.x^{m-1} - \frac{m.n}{x^{n+1}} = \frac{nm}{x^{n+1}}(x^{m+n} - 1).$$

Donc $F'(x) > 0$ si $x > 1$, et $F'(x) < 0$ entre 0 et 1. Ainsi F est décroissante jusqu'à la valeur $F(1) = n + m$, puis croissante, on a donc bien $\forall x > 0, F(x) \geq n + m$.

Si $U, V > 0$, posons $x = \dfrac{U^{\frac{1}{n+m}}}{V^{\frac{1}{n+m}}}$ et appliquons l'inégalité précénte ; il vient :

$$n.(\frac{U^{\frac{1}{n+m}}}{V^{\frac{1}{n+m}}})^m + \frac{m}{(\frac{U^{\frac{1}{n+m}}}{V^{\frac{1}{n+m}}})^n} \geq n + m \Rightarrow \frac{n}{n+m}U + \frac{m}{n+m}V \geq U^{\frac{n}{n+m}}V^{\frac{m}{n+m}}.$$

Comme ceci s'applique pour tous $U, V > 0$, et tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que si $\lambda = \dfrac{n}{n+m}, 1 - \lambda = \dfrac{m}{n+m}$, est n'importe quel rationnel tel que $0 < \lambda < 1$, on obtient :

$$\lambda.U + (1-\lambda).V \geq U^\lambda.V^{1-\lambda}.$$

Ceci reste vrai pour λ réel entre 0 et 1, puisque les fonctions impliquées sont continues et que tout réel $\lambda \in [0, 1]$ est limite de rationnels, par exemple les débuts de son écriture décimale.
En appliquant ce qui précède à $U = a^x$, $V = a^y$, on obtient bien la convexité de toute fonction exponentielle de base a.
Comme $\dfrac{a^{-h} - 1}{-h} = a^{-h}\dfrac{a^h - 1}{h}$ on voit que les dérivées à gauche et à droite en 0 sont les mêmes, donc l'exponentielle est dérivable en 0, de dérivée qu'on notera $L(a)$.
Comme $\dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\dfrac{a^h - 1}{h}$, on voit que la dérivée de l'exponentielle existe en tout x et vaut $L(a).a^x$.
Comme on a :

$$\forall a, b, x, b^x = a^{x \log_a(b)},$$

la formule de dérivation des composées prouve que :

$$L(b) = L(a)\log_a(b).$$

Autrement dit $b \mapsto L(b)$ est proportionnelle à une fonction log. Comme $x \mapsto 2^x$ n'est pas constante, $L(2) \neq 0$, et donc $L(b) = L(2)\log_2(b)$ avec $L(2) \neq 0$. La fonction $\log_2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, donc il y a un unique b tel que $L(b) = 1$. Ce réel est tel que $\log_2(b) = L(2) > 0$ car $x \mapsto 2^x$ est croissante, donc $b > 1$. Ainsi $b = e$ est bien le réel annoncé, et la formule $L(u) = L(a)\log_a(u)$ avec $e = a, L(a) = 1$, donne $L(u) = \log_e(u)$.
Comme annoncé, on note ln cette fonction log, et exp ou $x \mapsto e^x$ l'exponentielle correspondante, et les formule de dérivées des fonctions composées donnent les résultats de (2).

Dérivations des fonctions usuelles (2) :
liste de dérivées et aperçu des polynômes de Taylor usuels.

On a déjà donné comme exemple les dérivées des polynômes, mais de toute façon les dérivée des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ redonnent les expressions calculées en algèbre (cf. Semestre 1).

Par ailleurs, On retrouve les formules donnant les dérivées des puissances, sur R_+^*, comme cas particulier de $x^\alpha = e^{\alpha.\ln(x)}$ de dérivée $\frac{\alpha}{x}.e^{\alpha.\ln(x)} = \frac{\alpha}{x}.x^\alpha = \alpha.x^{\alpha-1}$.
Plus généralement on obtient :

$$[x^\alpha]^{(n)} = \alpha.(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

De même :

$$[a^x]^{(n)} = (\ln(a))^n.a^x$$

$$[\ln(x)]^{(n)} = [x^{-1}]^{(n-1)} = (-1)(-2)...[-(n-1)]x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}.$$

On trouve aussi les dérivées des fonctions circulaires, par exemple en démontrant la fameuse inégalité : $\sin(x) < x < \tan(x)$ pour $0 < x < \pi/2$, qui s'établit géométriquement, et implique que : $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$ tend vers 1. Ainsi $\sin'(0) = 1$.

On a alors, en utilisant :

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0} \frac{\cos(\alpha)-1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}(-2\sin(\alpha/2))\frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} = 0,$$

donc $\cos'(0) = 0$.

Ensuite les formules $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h), \sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$ donnent facilement que :

$$\cos' = -\sin, \sin' = \cos.$$

On peut résumer les dérivées de tous ordres en écrivant :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2), \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2).$$

Remarquons qu'en étendant aux fonctions complexes d'une variable réelle les propriétés de calcul vues dans les précédents chapitres, on verrait facilement que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ est dérivable, de dérivée $-\sin(x) + i\cos(x) = ie^{ix}$. L'exponentielle complexe se dérive comme les exponentielles réelles, ce qui permet de retenir toutes les formules usuelles.

On a aussi :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Par ailleurs les formules de dérivée d'une réciproque donnent :

$$Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad Arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On retiendra aussi les polynômes de Taylor usuels, tous donnés en $a = 0$:

$$f(x) = e^x, \text{ ordre } n \geq 1, \quad P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \ln(1+x), \text{ ordre } n \geq 1, \quad P(x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$f(x) = \cos(x), \text{ ordre } 2n,\ n \geq 1, \quad P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(x) = \sin(x), \text{ ordre } 2n+1, n \geq 1, \quad P(x) = x - \frac{x^3}{6} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé, ordre } n \geq 1,$$

$$P(x) = 1 + \alpha.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n.$$

Par exemple : $\alpha = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n$.