Licence de Sciences et Technologies **EM21 - Analyse**

Fiche de cours 3 - Limite et continuité des fonctions réelles de la variable réelle.

Limites des fonctions.

On ne rappellera pas ici les définitions de base sur les fonctions: ensembles de définition, fonctions monotones, composition, addition, multiplication, division des fonctions, autant d'opérations qui ont été étudiées au premier semestre.

On dira aussi qu'une fonction f est "majorée sur A", A étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel f est définie, si on peut trouver un nombre M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in A$.
Remarque : si un nombre M majore f sur A, tout réel $M' > M$ majore aussi f sur A. Le plus petit majorant de f sur A est la borne supérieure de f sur A, c'est la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres $f(x)$, pour $x \in A$, qu'on appelle *image* de A par f et qu'on note $f\!<\!A\!>$ ou $f(A)$.

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

On définit de même les fonctions minorées, bornées, sur A, la borne inférieure de f sur A.

On définit la limite pour les fonctions de manière similaire à ce qu'on a énoncé pour les suites.

Définition:
Soient a, ℓ deux réels, et f une fonction définie au moins dans un intervalle ouvert contenant a.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ, ou a pour limite ℓ, quand x tend vers a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$, dépendant en général de ε, tel que si x approche a à α près, alors $f(x)$ approche ℓà ε près:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

De même on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, ou a pour limite $+\infty$, quand x tend vers a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si pour tout réel A, il existe un réel $\alpha = \alpha(A) > 0$, dépendant de A, tel que si x approche a à α près, alors $f(x)$ est plus grand que A:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

Toutes ces définitions sont assez similaires les unes aux autres. On peut facilement unifier ces formulations grâce à la notion de voisinage :

Définition :
(i) Si $x_0 \in \mathbb{R}$, un sous ensemble V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* (resp. *voisinage à gauche*, *voisinage à droite*) de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq V$ (resp. $]x_0 - r, x_0] \subseteq V$, $[x_0, x_0 + r[\subseteq V$).
(ii) Avec les mêmes notations, on appelle voisinage épointé de x_0 (resp. voisinage épointé à gauche, à droite) un ensemble V^* tel que $x_0 \notin V^*$ et que $\{x_0\} \cup V$ soit un voisinage de x_0 (resp. un voisinage à gauche, à droite).
(iii) Un sous ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A, +\infty[\subseteq V$ (resp. $-\infty, A[\subseteq V$).

Avec ces définitions, on peut formuler les limites d'une seule manière :

Définition : (i) Si $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et si f est une fonction, définie au moins dans un voisinage de a, on dit pose $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, on peut trouver un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $f(x) \in V_\ell$ dès que $x \in V_{x_0}$ c'est-à-dire :

$$f(V_{x_0}) \subseteq V_\ell.$$

(ii) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et que la définition précédente est vraie en remplaçant "voisinage de x_0 par "voisinage épointé de x_0" (resp. "voisinage à gauche de x_0", "voisinage à droite de x_0", "voisinage épointé à gauche de x_0", "voisinage épointé à droite de x_0"), on notera :
$\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x) = \ell$, (resp. $\lim\limits_{x\to a, x\leq a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a, x\geq a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$).

On parlera de limite à gauche, à droite, dans les derniers cas (qu'on pourra aussi noter $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = \ell$, resp. $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$.
Avec ces formulations, des expressions comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$, etc., sont définies (exercice : écrire chacune de ces définitions...).

On peut aussi réécrire la définition des limites des suites : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels et si $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, il y a un rang N à partir duquel tous les u_n sont dans V : $\forall n \geq N, u_n \in V$.

De plus, la notion de limite d'une fonction en un point est intimement liée aux limites des suites grâce à la propriété suivante :

Propriété : Soient $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathbf{V_0}$ (resp. un voisinage épointé, un voisinage à gauche, etc.). Alors on a $\lim\limits_{x\to a, x\in\mathbf{V_0}} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall n, u_n \in \mathbf{V_0}$, on a $[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell]$.

Preuve : Montrons que si on a $\lim f = \ell$, l'assertion sur les suites est vraie, et si on n'a pas $\lim f = \ell$, elle est fausse.

(1) Supposons $\lim\limits_{x\to a, x\in\mathbf{V_0}} f(x) = \ell$.

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall n, u_n \in \mathbf{V_0}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Soit W un voisinage de ℓ. Comme $\lim\limits_{x\to a, x\in\mathbf{V_0}} f(x) = \ell$, on doit pouvoir trouver un voisinage $V \subseteq \mathbf{V_0}$ de a tel que pour tout x : $[x \in V \Rightarrow f(x) \in W]$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, et que V est un voisinage de a, il y a un rang N à partir duquel $u_n \in V$.

Finalement $n \geq N \Rightarrow u_n \in V \Rightarrow f(u_n) \in W$.

La définition est satisfaite, on a bien $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

(2) Supposons qu'on n'ait pas : $\lim\limits_{x\to a, x\in\mathbf{V_0}} f(x) = \ell$. Cela veut dire que la définition de la limite n'est pas satisfaite. Cette définition s'écrirait :

"pour tout voisinage W de ℓ, on peut trouver un voisinage V de a tel que $x \in V \to f(x) \in W$."

La négation de cette phrase doit donc être vérifiée :

"Il existe au moins un voisinage W de ℓ, tel que pour tout voisinage $V \subseteq \mathbf{V_0}$ de a, on puisse trouver un réel x tel que $x \in V$ mais $f(x) \notin W$."

1er Cas : a est un réel ; prenons comme voisinage $V = V^n$ l'intersection de $]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[$ et de $\mathbf{V_0}$ $V^n = \mathbf{V_0} \cap]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[$. Il doit donc y avoir à chaque fois un réel, appelons-le u_n, tel que $u_n \in V^n$ et $f(u_n) \notin W$.

2e Cas : $a = +\infty$; prenons comme voisinage $V = V^n$ l'intersection de $]n; +\infty[$ et de $\mathbf{V_0}$ $V^n = \mathbf{V_0} \cap]n; +\infty[$. Il doit donc y avoir à chaque fois un réel, appelons-le u_n, tel que $u_n \in V^n$ et $f(u_n) \notin W$.

3e Cas : $a = -\infty$; prenons comme voisinage $V = V^n$ l'intersection de $]-\infty; -n[$ et de $\mathbf{V_0}$ $V^n = \mathbf{V_0} \cap]-\infty; -n[$. Il doit donc y avoir à chaque fois un réel, appelons-le u_n, tel que $u_n \in V^n$ et $f(u_n) \notin W$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sera une suite d'éléments de $\mathbf{V_0}$ qui tend vers a mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ est impossible car, à cause de W, la définition de la limite ne peut être satisfaite.

On a montré que si $f(x)$ ne tend pas vers ℓ en a, on peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{V_0}$ qui tend vers a mais telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ. La preuve est complète.

Pour montrer, par le calcul, qu'une fonction donnée a bien telle ou telle limite en un point, on utilise rarement ce résultat : il est souvent plus économique de faire les estimations (inégalités, majorations,...) directement sur $f(x)$.
En revanche si on veut montrer qu'une telle fonction *n'a pas pour limite un réel donné* en un point, ou même qu'elle *n'a pas de limite du tout* en un point, c'est un résultat très utile : il précise quel type de contre exemple il faut fournir à la définition des limites. On peut citer :

Corollaire : Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathbf{V_0}$ (resp. un voisinage épointé, un voisinage à gauche, etc.). Alors, si on peut trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{V_0}$, telles que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}, (f(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ *aient deux limites distinctes* quand $n \longrightarrow +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a, x\in\mathbf{V_0}} f(x)$ n'est pas définie (ni finie ni infinie).

Remarque : La réciproque de ce résultat est vraie.

Par ailleurs, la propriété précédente fournit un renvoi commode, pour la plupart des propriétés calculatoires sur les limites des fonctions, à ce qui se passe sur les suites.

Propriétés :
(a) la limite d'une fonction en un point, si elle existe, est unique ;
(b) les limites satisfont aux mêmes règles de calcul que pour les suites.
(c) Si la fonction gof est définie au voisinage de x_0, si $f(x)$ tend vers Y_0 quand x tend vers x_0, et si $g(y)$ tend vers ℓ quand y tend vers Y_0, alors $gof(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0.

Preuves : on fait la preuve de (c), le lecteur adaptera celle-ci pour obtenir (a), (b).

Supposons les hypothèse de (c) vérifiées et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points tendant vers x_0, et dans le voisinage de x_0 où gof est définie. Alors $f(u_n)$ est défini pour tout n et $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers Y_0 d'après la propriété (sens : "limite des fonctions $\Rightarrow$ limite des suites").

De même, comme $v_n = f(u_n)$ tend vers Y_0 et que g doit être définie sur ces points, $g(v_n) = gof(u_n)$ tend vers ℓ (même sens de la propriété).

On a donc prouvé que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers x_0, $[gof(u_n)]_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ. D'après la propriété, on a bien $\lim\limits_{x\to x_0} gof(x) = \ell$ (sens : "limite de toutes les suites $\Rightarrow$ limite des fonctions").

Les propriétés qui, à partir d'hypothèses sur la limite, donne un résultat sur les termes de la suite, restent vraies, sauf que pour les fonctions on doit remplacer "à partir d'un certain rang" par "dans un voisinage du point considéré".

On peut ainsi citer :

Propriété : Soient $x_0, \ell \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathbf{V_0}$ (resp. un voisinage épointé, un voisinage à gauche, etc.) et telle que $\lim\limits_{x\to x_0, x\in\mathbf{V_0}} f(x) = \ell$. Alors :
(a) Si b est un réel tel que $\ell > b$, on peut trouver un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) > b$ (c'est-à-dire tel que : $\forall x \in V, f(x) > b$.
(b) À l'inverse, si on peut trouver un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) \leq b$, alors $\ell \leq b$.
(a') Si b est un réel tel que $\ell < b$, on peut trouver un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) < b$.
(b) À l'inverse, si on peut trouver un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x) \geq b$, alors $\ell \geq b$.
(c) Si $\ell \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x)$ est bornée.
(d) Si $\ell = +\infty$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x)$ est minorée (et elle n'est majorée sur *aucun* voisinage de x_0).
(d') Si $\ell = -\infty$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel $f(x)$ est majorée (et elle n'est minorée sur *aucun* voisinage de x_0).
(e) Si $\ell \neq 0$, on peut trouver un voisinage de x_0 sur lequel la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est définie, et a une limite qui se calcule comme lorsqu'on inverse la limite d'une suite.

Définition : Soit f une fonction, I un intervalle tel que $I \subseteq D_f$, et $x_0 \in I$.

(i) Si $\lim\limits_{x\to x_0, x\in I} f(x) = f(x_0)$, on dit que f est continue en x_0 (continue à gauche si x_0 est la borne supérieure de I, continue à droite si x_0 en est la borne inférieure).

(ii) Si pour tout $x \in I$, f est continue en x, on dit que f est continue sur I.

Propriété :

(1) Une somme, un produit de fonctions continues est continue. Une composée de fonctions continues, quand elle est définie, est continue. Un quotient de fonctions continues est continu quand il est défini.

(2) Une fonction est continue sur un intervalle I si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente telle que : $\forall n, u_n \in I$ et $\lim_n u_n \in I$, on a : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n)$.

Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Avec les propriétés des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, on peut prendre conscience du carcatère "continu" qui est assuré à l'ensemble des réels par l'axiome de la borne supérieure.

D'abord, la propriété suivante, appelée théorème des valeurs intermédiaire, et qui concerne l'image d'un intervalle par une fonction continue.

Propriété :

(i) Soit $A \subseteq \mathbf{R}$, alors A est un intervalle si et seulement si il vérifie la propriété de convexité suivante : $(*) \forall y, z \in A, y < z \Rightarrow [y, z] \subseteq A$ (A est "sans trou").

(ii) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie et continue sur I. Alors l'image $f(I) = \{y \in \mathbf{R} \mid \exists x \in I, f(x) = y\}$ de I par f est un intervalle.

(iii) (Autre formulation : théorème des valeurs intermédiaires) Soit deux réels $a < b$ et une fonction f définie et continue sur $[a, b]$. Alors, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ce qu'on peut résumer par $f(a)f(b) < 0$), il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve :

(i) Un intervalle vérifie la propriété énoncée. Réciproquement, si A vérifie cette propriété, soit A est vide, dans ce cas c'est bien un intervalle, soit A est non vide, auquel cas on peut considérer au moins un réel $\alpha \in A$. Posons $b = +\infty$ si A n'est pas majoré, et $b = sup(A)$ sinon. Montrons que $[\alpha, b[\subseteq A$. En effet soit $x \in [\alpha, b[$. Si $b = sup(A)$, par définition de la borne sup, il existe $u \in A$ tel que $x < u$. Par suite $x \in [\alpha, u] \subseteq A$. Si $b = +\infty$, cela signifie que A n'est pas majoré, donc pas majoré par x, il y a donc de nouveau $u \in A$ tel que $x < u$ et donc dans ce cas aussi : $x \in [\alpha, u] \subseteq A$.

Ainsi la partie de A qui est au-dessus de α contient $[\alpha, b[$. C'est donc $[\alpha, b[$ ou $[\alpha, b]$ si $b \in \mathbf{R}$, et $[\alpha, +\infty[$ si $b = +\infty$.

De même la partie de A qui est en-dessous de α est $]a, \alpha]$ ou $[a, \alpha]$ si A est minorée et $a = inf(A)$, et $]-\infty, \alpha]$ si A n'est pas minorée.

Au bilan, A est un des neufs types d'intervalles $[a, b], [a, b[, [a, +\infty[,]a, b],]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, b],]-\infty, b[,]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.

(iii) Supposons $f(a)f(b) < 0$ et posons $E = \{x \in [a, b] \mid f(x)f(a) > 0\}$ (ensemble des x tels que $f(x) et f(a)$ soient de même signe). On a : $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(a) \neq 0 \Rightarrow f(a)^2 > 0 \Rightarrow a \in E$. E est non vide est majoré par b, il a donc une borne supérieure $c \in [a, b]$.

Notons que, par continuité de f en b, $f(a)f(b) < 0$ entraîne qu'on peut trouver un $r > 0$ tel que $f(x)f(a) < 0$ si $x \in]b - r, b]$. Autrement dit E ne continent aucun point de $]b - r, b]$, donc $b - r$ majore E et $c \leq b - r < b$.

Ceci prouve que $c < b$, donc $]c, b]$ est un intervalle non vide sur lequel $f(x)f(a) \leq 0$ (puisque les éléments de E sont *avant* $c = sup(E)$), par continuité de f en c on a donc $f(c)f(a) \leq 0$.

Si on avait $f(c)f(a) < 0$, on aurait $c \notin E$ donc $c > a$ et par continuité de f en c il y aurait un intervalle $]c - r', c + r'[\subseteq [a, b]$ avec $r' > 0$ sur lequel $f(x)f(a) < 0$. Or les point de E seraient avant $c = sup(E)$, et donc avant $c - r'$ puisqu'aucun élément de $]c - r', c + r'[$ ne serait dans E. C'est absurde, car $c - r' < c$ serait un majorant de E plus petit que $c = sup(E)$. Finalement l'hypothèse $f(c)f(a) < 0$ est impossible.

On a donc bien $f(c) = 0$.

Remarque : un autre raisonnement classique, la dichotomie pour situer un réel c tel que $f(c) = 0$.

On pose $a_0 = a, b_0 = b, I_0 = [a_0, b_0]$. On construit par récurrence sur n une suite I_n d'intervalles, de longueurs $\frac{b-a}{2^n}$, tels que $f(a_n)f(b_n) < 0$. Voici comment on passe de l'étape n à l'étape $n + 1$:

On part de I_n, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, tel que $f(a_n)f(b_n) < 0$. On pose $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m) = 0$, on pose $c = m$, la construction s'arrête là. Sinon on a $f(a_n)f(m) < 0$ ou $f(b_n)f(m) < 0$ puisque le produit de ces deux nombres est $f(a_n)f(b_n)f(m)^2 < 0$. Conclusion : on peut couper I_n en deux et garder une moitié $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ telle que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, et $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$.

Si on peut construire cette suite, les longueurs des intervalles tendant vers 0, on peut lui appliquer le théorème des segments emboîtés : il existe c tel que $\{c\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$, et tel que c soit la limite commune des suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. La relation $f(a_n)f(b_n) < 0$ devient, à la limite, $f(c)^2 \leq 0$ donc $f(c) = 0$, un carré étant toujours positif.

(ii) Soit f définie sur un intervalle I, z, z' deux points distincts de $f(I)$, et y tel que $z < y < z'$. Montrons que y est aussi dans $f(I)$.

Comme $z, z' \in f(I)$, ils ont des antécédents $x, x' \in I$. La fonction $t \mapsto f(t) - y$ est continue entre x et x' (fonction continue - une constante) et passe de la valeur $f(x) - y = z - y < 0$ à la valeur $f(x') - y = z' - y > 0$, donc change de signe. D'après le (iii), elle s'annule entre x et x'. Il y a donc bien un point $c \in I$ tel que $f(c) - y = 0$ ou $f(c) = y$.

Le réel y a donc un antécédent ; $f(I)$ est donc "convexe", d'après le (i) c'est un intervalle.

Remarque : on ne peut pas, en général, trouver de lien entre la nature de l'intervalle I et celle de $f(I)$. Même dans des cas aussi simples que $I_1 =]0,1]$ ou $I_2 = \mathbf{R}_+$ on peut obtenir des images de toute sorte :
Sur I_1, que sont les images $f(I)$ pour :

$$f(x) = x \ ; \ f(x) = 4x(1-x) \ ;$$
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-x)\sin(\frac{1}{x}) \ ; f(x) = \frac{1}{x} - 1 \ ;$$
$$f(x) = \frac{1}{x}.|\sin(\frac{1}{x})| \ ; \ f(x) = \frac{1}{x}.\sin(\frac{1}{x}) \ ?$$

Sur I_2, si $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, montrer que $g(I_2) = I_1$. En déduire une série de contre exemples identiques...

On voit, dans ces exemples, qu'une borne "absente" dans un intervalle, qui apparaît comme une "ouverture", permet de faire prendre à la courbe et à l'image obtenue les formes les plus variées.

Si les deux bornes sont bien là, on peut conclure :

Théorème : soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $f([a,b]) = J$ est un intervalle fermée borné $J = [m, M]$ ce qui veut dire : non seulement J est borné mais ses bornes m et M sont des extremums atteints, elles ont des antécédents par f.

Preuve : Montrons d'abord que f est bornée sur $[a,b]$. Soit $E = \{x \in [a,b] \mid f$ est bornée sur $[a,x]\}$.

Comme f est continue en a, f est bornée au voisinage de a et donc E est non vide, contient des réels $a + \varepsilon > a$, et est majoré par b. On peut poser $s = sup(E) > a$.

Montrons que $b = s \in E$.

D'abord, f est continue en s, il y a donc un voisinage $V =]s-r, s+r[$ de s tel que f soit borné sur $[a,b] \cap V$. Comme $s = sup(E)$, il y a forcément des éléments x de E qui soient $> s - r$. Alors $x \in E$ donc f est bornée sur $[a,x]$. Finalement f sera bornée sur l'intersection de $[a,b]$ avec $[a,x] \cup V = [a, s+r]$. Comme $s = sup(E)$ cela ne laisse que la possibilité $s = b$ et $b \in E$.

Ainsi f est une fonction bornée.

L'ensemble non vide $f([a,b])$ a donc une borne supérieure M sur $[a,b]$, et une borne inférieure m. On va voir qu'il revient au même de pouvoir dessiner une courbe non bornée ou de pouvoir dessiner une coubre pour laquelle les $y = f(x)$ se rapprochent de la valeur M sans l'atteindre.

En effet, si on avait $f(x) < M$ pour tout x, la fonction positive $g : x \mapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ serait bien définie sur $[a,b]$ et donc continue. Comme $M = supf([a,b])$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pourrait trouver $x_n \in [a,b]$ tel que : $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) < M$ ce qui donne $0 < M - f(x_n) < \dfrac{1}{n} \Rightarrow n < g(x_n)$. La fonction g serait donc continue et non bornée sur $[a,b]$, or on vient de voir que c'est impossible.

L'hypothèse que $\forall x, f(x) < M$ est donc contradictoire. Il y a donc nécessairement un $x_1 \in [a,b]$, tel que $f(x_1) = M$. De même il y a $x_2 \in [a,b]$, tel que $f(x_2) = m$. Finalement $f([a,b])$ est l'intervalle fermé borné $[m, M]$, et les bornes m et M sont un minimum et un maximum atteints (pour $x = x_2$ et x_1).

fonctions monotones et continuité

On a, comme pour les suites, un lien entre monotonie et limites :

Propriété : Soit $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $a \in]-\infty, b[$, et f une fonction monotone sur l'intervalle $[a,b[$. Alors $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow a$ et :

- Si f est croissante, cette limite vaut $+\infty$ si f est non majorée, et vaut $sup\ f(]a,b])$ si f est minorée ;

- Si f est décroissante, cette limite vaut $-\infty$ si f est non minorée, et vaut $inf\ f(]a,b])$ si f est minorée ;

On a les mêmes résultats pour une fonction monotone sur un intervalle $]a,b]$ avec a réel ou $a = -\infty$, pour la limite quand $x \longrightarrow a, x > a$.

Preuve : On fait le premier cas. Supposons f croissante sur $[a,b[$.

(i) Si f est non majorée, soit $A \in \mathbf{R}$. Le réel A ne majore pas f, il y a donc $y \in [a, b[$ tel que $f(y) > A$. Comme $y < b$, y s'écrit $y = b - \delta$ avec $\delta > 0$. Et comme f est croissante on a :

$$\forall x \in [a, b[, b - \delta < x < b \Rightarrow A < f(b - \delta) = f(y) \leq f(x).$$

La définition de la limite est donc satisfaite, on a dans ce cas $\lim\limits_{x \in [a,b[, x \longrightarrow b} f(x) = +\infty$.

(ii) Si f est majorée, elle a une borne supérieure $s = sup\ f([a, b[)$. Soit $\varepsilon > 0$. $s - \varepsilon$ ne majora pas f, il y a donc $y \in [a, b[$ tel que $f(y) > s - \varepsilon$. Comme $y < b$, y s'écrit $y = b - \delta$ avec $\delta > 0$. Et comme f est croissante et majorée par s, on a :

$$\forall x \in [a, b[, b - \delta < x < b \Rightarrow s - \varepsilon < f(b - \delta) = f(y) \leq f(x) \leq s.$$

La définition de la limite est donc satisfaite, on a dans ce cas $\lim\limits_{x \in [a,b[, x \longrightarrow b} f(x) = s$.

On rappelle qu'une bijection $b : A \rightarrow B$ d'un ensemble A sur un ensemble B est une application telle que tout $y \in B$ ait un et un seul antécédent $x \in A$ par f. L'application $f^{-1} : B \rightarrow A$, qui a tout y associe son unique antécédent x par f, s'appelle la réciproque de f : c'est l'unique application qui vérifie $fof^{-1} = Id_B, f^{-1}of = Id_A$.

Propriétés : Soient I un intervalle non vide de bornes a et b avec $a < b$, et f une définie sur I.
Considérons les trois propriétés suivantes :

(a) f est continue sur I ;
(b) f est strictement monotone sur I ;
(c) f est une bijection de I sur un intervalle J ;

alors si 2 de ces propriétés sont vraies, la troisième l'est aussi. Si elles sont toutes trois vraies, la bijection réciproque de f est continue sur J. De plus J est un intervalle de bornes $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x)$, dans l'ordre si f est croissante, dans l'ordre inverse si elle est décroissante.
De plus l'intervalle J contient la borne $f(a)$ si et seulement si $a \in I$, de même pour b.

Preuve :

(a)+(b) $\Rightarrow$ (c)

Si f est continue sur I, $f(I) = J$ est un intervalle, tout $y \in J$ a un antécédent par f dans I : $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Si f est strictement croissante on a : $t < x \Rightarrow f(t) < f(x) = y$, et $t > x \Rightarrow f(t) > f(x) = y$. L'antécédent de y est donc unique. Le résultat est le même si f est strictement décroissante. L'application $f : I \rightarrow J$ est bien une bijection.

(b)+(c) $\Rightarrow$ (a)

Si f est une bijection strictement monotone de I sur un intervalle J, et si $x_0 \in I$, elle est continue en x_0. Supposons par exemple que f est croissante et que x_0 ne soit pas la borne inférieure de I. Alors f est majorée par $f(x_0)$ sur l'intervalle non vide $]-\infty, x_0[\cap I$, donc a une limite $\ell = sup\ f(]-\infty, x_0[\cap I) \in \mathbf{R}$ quand $x \rightarrow x_0, x < x_0$. Notons que $\ell \leq f(x_0)$ (car une borne sup. est *le plus petit majorant*).

Les $x < x_0$ ont une image $f(x) \leq \ell$, les $x \geq x_0$ ont une image $f(x) \geq f(x_0)$. On ne peut pas avoir $\ell < f(x_0)$ sinon les réels entre ℓ et $f(x_0)$ n'auraient pas d'antécédent et $f(I)$ ne serait pas un intervalle. Donc $\ell = f(x_0)$ et f est continue à gauche en x_0.

On prouve de la même façon que f est continue à droite en x_0 si ce n'est pas la borne sup. de I. Finalement f est continue sur I.

(c)+(a) $\Rightarrow$ (b)

Soit $f : I \rightarrow J$ bijective et continue. Montrons qu'elle est strictement monotone.

Soit $u, v, x \in I$ tel que $u < x < v$. On a $f(u) < f(v)$ ou $f(u) > f(v)$ puisque f étant bijective, u et v ne peuvent avoir la même image (chaque $y \in J$ n'a *qu'un* antécédent).

Supposons par exemple $f(u) < f(v)$. Montrons que $f(u) < f(x) < f(v)$: on a $f(x) < f(v)$ sans quoi $f(v)$ aurait un antécédent entre u et x, et $f(u) < f(x)$, sans quoi $f(u)$ aurait un antécédent entre x et v.

Si on avait supposé $f(u) > f(v)$ on aurait obtenu $f(u) > f(x) < f(v)$.

Autrement dit, la fonction f préserve l'ordre de 3 nombres consécutifs.

Ceci entraîne que f est monotone. En effet si on avait 4 nombres x, y, x', y' tels que $x < y, x' > y'$, $f(x) < f(y)$ et $f(x') > f(y')$, il suffit d'examiner les différents ordres possibles des 4 nombres :

$$x, y, x', y' \ ; \ x, x', y, y' \ ; \ x, x', y', y \ ; \ x', x, y, y' \ ; \ x', x, y', y \ ; \text{ ou } x', y', x, y.$$

Pour trouver, suivant les cas, trois réels consécutifs tels que les trois images ne soient pas dans le même ordre.

Par exemple pour le premier cas : x, y, x' si $f(x') < f(y)$; x, x', y' sinon.

On a donc soit $\forall x > y, f(x) < f(y)$, soit $\forall x < y, f(x) > f(y)$.

Fin de la preuve : (a)+(b)+(c) $\Rightarrow$ les autres assertions.

Si (a),(b),(c) sont toutes vraies, f est donc une bijection de I sur J, et on peut considérer la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I, y \mapsto f^{-1}(y) = x =$ antécédent de y par f.

Si f est croissante et si $y = f(x) < y' = f(x')$, on a forcément $x < x'$ (sinon par application de la croissance de f on aurait $y \geq y'$). Ainsi $y < y' \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Autrement dit la bijection réciproque d'une fonction croissante est croissante.

De même la réciproque d'une fonction décroissante est décroissante.

Ainsi f^{-1} est une bijection de l'intervalle J sur l'intervalle I et est strictement monotone. En appliquant ce qu'on vient de démontrer [(b)+(c) $\Rightarrow$ (a)], on en déduit que f est continue sur J.

Le théorème est ainsi prouvé.

Dans les raisonnements précédents, on voit apparaître deux propriétés qu'on distinguera :

Définition : Soit une application $f : A \to B$ d'un ensemble A dans un ensemble B.

- Si tout $y \in B$ a au plus 1 antécédent dans A, c'est-à-dire si deux éléments distincts $x, x' \in A$ ont des images distinctes ($x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$), on dit que f est injective ou est une injection de A dans B.

- Si tout $y \in B$ a au moins un antécédent dans A, autrement dit si $f(A) = B$, on dit que f est surjective ou est une surjection de A *sur* B.

Exemples :

- La fonction $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+, \quad x \mapsto x^2$ est une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+$;
- La fonction $f_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, est est injective.
- Une fonction $f : A \to B$ est bijective de A sur B si et seulement si elle est à fois injective et surjective.

Applications : fonctions puissances, exponentielles et logarithmes

L'existence de nombres comme $\sqrt{2}$, qu'on a peut-être vérifié directement comme conséquence de l'axiome de la borne supérieure (en regardant la borne supérieure des réels x tels que $x^2 < 2$), apparaît ici comme un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires et des théorèmes généraux sur les fonctions continues. Plus précisément :

Propriété 1 : Si $n \in \mathbf{N}^*$ est un entier, la fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection croissante de $\mathbf{R}_+$ sur lui-même. La bijection réciproque se note $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ou $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Si n est impair, $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont des bijections réciproques croissantes de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Preuve : $I : x \mapsto x$ est continue en tout x_0 car $|I(x) - I(x_0)| = |x - x_0|$, donc $|I(x) - I(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Par produit de fonctions continues, les fonctions $x \mapsto x^n = x \times x \times ... \times x$, est continue. Elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ par les propriétés de $<$ et du produit. Enfin $x^n \geq x$ si $x \in \mathbf{R}_+$, donc $x^n \longrightarrow +\infty$ si $x \longrightarrow +\infty$.

Ce sont donc des bijections dont les réciproques sont croissantes et continues. La formule $(-x)^n = -x^n$, valable si n est impair, prouve le reste des assertions.

Attention : on réservera la notation $x^{\frac{1}{n}}$ aux $x \geq 0$.

Propriété 2 : Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$, et si $x > 0$, les nombres $\sqrt[q]{x^p}$ et $(\sqrt[q]{x})^p$ sont égaux, et leur valeur ne dépend que du rationnel r et pas de la fraction choisie pour le représenter. Si on note x^r cette valeur, la nouvelle notation vérifie les propriétés habituelles des puissances, à savoir :
$\forall x, x' \in \mathbf{R}_+^*, \forall y, y' \in \mathbf{Q}$,

(i) $x^{y+y'} = x^y.x^{y'}; (x^y)^{y'} = x^{y.y'}; x^{-y} = \dfrac{1}{x^y}; (xx')^y = x^y.x'^y; (\dfrac{x}{x'})^y = \dfrac{x^y}{x'^y}; 1^y = 1.$

(ii) $y > 0$ et $x < x' \Rightarrow x^y < x'^y$; $x > 1$ et $y < y' \Rightarrow x^y < x^{y'}$.

(iii) Si $y > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^y = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^y = +\infty$; Si $y < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^y = 0$.

Preuve :

Si $r = p/q = p'/q'$, les nombres $A = \sqrt[q]{x^p}$, $B = (\sqrt[q]{x})^p$, $C = \sqrt[q']{x^{p'}}$, $D = (\sqrt[q']{x})^{p'}$, vérifient $A^{qq'} = B^{qq'} = C^{qq'} = D^{qq'} = x^{p'q}$ car $rqq' = pq' = p'q$.

Comme la fonction $t \mapsto t^{qq'}$ est une bijection croissante de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$, cela signifie que $A = B = C = D$.

On vérifie de même les formules (i) et (ii) en élevant à une puissance entière suffisamment grandes pour n'avoir que des puissances entières à manipuler.

Enfin le (iii) est juste une composition de limites ($t \mapsto \sqrt[q]{t}$ et $t \mapsto t^p$).

On va maintenant prouver qu'on peut prolonger ces définitions de x^y quand $x > 0$ et y est un réel quelconque, pas forcément rationnel. L'idée est de prolonger "par continuité", en utilisant deux ingrédient sur les nombres x^r avec r rationnel, d'abord la monotonie de $r \mapsto x^r$, et le fait que l'ensemble des x^r pour r variable est dense, ce qui prouvera que la fonction $y \mapsto x^y$ est continue, sans quoi elle laisserait un "trou" (cf raisonnement pour montrer (b)+(c) $\Rightarrow$ (a) dans le théorème sur bijection et continuité). On étudie d'abord cet aspect :

Propriété 3 :

(i) ("Propriété d'Archimède pour la multiplication") Si A, B sont deux réels positifs tels que $a > 1$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^n > B$;

(ii) Si a est un réel positif différent de 1, $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$, l'ensemble des réels a^r pour $r \in \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}_+$, autrement dit si u, v sont des réels tels que $0 \leq u < v$, il existe $r \in \mathbf{Q}$ tel que $u < a^r < v$.

Preuve :

(i) Si $A > 1$, on peut écrire $A = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$, et la formule du binôme prouve alors : $\forall n \in \mathbf{N}^*, A^n = (1+\alpha)^n > 1 + n.\alpha$. La propriété d'Archimède usuelle montre qu'on peut trouver $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $n.\alpha > B-1$, d'où $A^n > 1+n.\alpha > 1+(B-1) = B$.

(ii) Supposons d'abord $a > 1$ et $0 < u < v$. Alors on a $1 < v/u$ donc d'après (i) il existe n tel que $a < (v/u)^n$ d'où $\sqrt[n]{a} < v/u$. Posons $t = \sqrt[n]{a} \in]1, v/u[$. En appliquant de nouveau (i), on voit qu'il existe des entiers p, p' tels que $t^p > u$ et $t^{p'} > 1/u$ ce qui équivaut à $t^{-p'} < u$.

Considérons les réels $t^{-p'}, t^{-p'+1}, ..., t^{-1}, t^0 = 1, t^1 = t, t^2, ..., t^p$. Le premier est $< u$, le dernier est $> u$, il y a donc un premier entier m entre $-p'$ et p tel que $t^m > u$. Pour ce m, $t^{m-1} \leq u$ donc $t^m = t^{m-1}t \leq u.t < u(v/u) = v$.

Ainsi le nombre $t^m = a^{m/n}$ est entre u et v.

Si $u = 0 < v$, il suffit de trouver un nombre a^r entre $v/2 > 0$ et v pour qu'il soit entre u et v, donc il n'y a aucune difficulté nouvelle.

Si $0 < a < 1$, on a $1 < 1/a$ et on peut trouver d'après les cas précédents un nombre $r \in \mathbf{Q}$ tel que $u < (1/a)^r = a^{-r} < v$, le problème est donc entièrement résolu.

Propriété 4 : Si $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ et x sont fixés, on a l'égalité entre :

- la borne supérieure des a^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r < x$ et la borne inférieure des a^r pour $r \in \mathbf{Q}, r > x$, si $a > 1$;

- la borne supérieure des a^r pour $r \in \mathbf{Q}$, $r > x$ et la borne inférieure des a^r pour $r \in \mathbf{Q}, r < x$, si $0 < a < 1$;

Si on note a^x cette valeur commune, on retombe sur les valeur usuelles de A^x quand $x \in \mathbf{Q}$, la fonction $x \mapsto a^x$ est continue, et est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ si $a > 1$, une bijection strictement décroissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ si $0 < a < 1$. Les formules (i)(ii)(iii) de la propriété 2 restent vérifiées pour les exposants réels.

Preuve : Regardons le cas $a > 1$.

Pour x quelconque, d'après les inégalités de la propriété 2, si $r < x < r'$, on a $a^r < a^{r'}$ donc les a^r pour $r < x$ sont majorées par les $a^{r'}$ pour tous les $r' > x$. Les bornes supérieures et inférieures évoquées existent donc, notons-les s et i, et on a $s \leq i$ (par exemple : si on fixe r', le nombre $a^{r'}$ majore tous les a^r, donc $s \leq a^{r'}$; comme ce raisonnement est valable pour chaque $r' > x$, s minore les nombres $a^{r'}$, d'où $s \leq i$). Si on avait $s < i$, on n'aurait aucun nombre a^r entre s et i, sauf peut-être a^x si $x \in \mathbf{Q}$. En tout cas cela ferait un "trou" et contredirait la densité, donc $s = i$. De plus si $x \in \mathbf{Q}$, a^x minore les $a^{r'}$ et majore les a^r, donc $s \leq a^x \leq i$ et finalement la nouvelle définition de a^x donne la "vieille" valeur de a^x.

Enfin si $x < x'$, il suffit de prendre deux rationnel t, t' tels que $x < t < t' < x'$ pour montrer que $a^x \leq a^t < a^{t'} < a^{x'}$. Ainsi $x \mapsto a^x$ est croissante. Si $x_0 \in \mathbf{R}$, elle a donc une limite à droite L^+ et une limite à gauche L^- quand $x \to x_0$, qui sont les bornes inférieures et supérieures des valeurs prises respectivement après et avant x_0. On a $L^- \leq a^{x_0} \leq L^+$.

Si $r \in \mathbf{Q}$, $r < x_0 \Rightarrow a^r \leq L^-, r > x_0 \Rightarrow a^r \geq L_+$. Ceci entraîne $L^+ = L^- = a^{x_0}$ sinon on aurait un "trou", un intervalle ouvert $]L^-, a^{x_0}[$ ou $]a^{x_0}, L^+[$, sans aucun nombre a^r.

Ainsi $x \mapsto a^x$ est continue, strictement croissante, définie sur $\mathbf{R}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n} = 0$, cette fonction a pour borne inférieure 0 et n'est pas majorée. On en tire (limites de fonctions monotones) :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

et donc $x \mapsto a^x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $]0, +\infty[= \mathbf{R}_+^*$.

Enfin tout réel étant limite d'une suite de rationnels, les inégalités et égalités de la propriété 2, valables pour $x, x' > 1$ et y, y' rationnels, passent "à la limite" aux cas de y, y' quelconques. On en tire tout ce qui concerne le cas $0 < a < 1$ en posant $a^x = 1/[(1/a)^x]$, la fonction $X \mapsto 1/X$ inversant le sens des inégalités dans $\mathbf{R}_+^*$.

Définition - Propriété 5 : Si $a \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto a^x$ s'appelle fonction exponentielle de base a. Si $a \neq 1$, sa bijection réciproque s'appelle fonction logarithme de base a et se note $x \mapsto \log_a(x)$. C'est une bijection continue de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$. De plus on a les formules, valables si $a, b \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}, x, y \in \mathbf{R}_+^*, t \in \mathbf{R}$:

(i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y), \log_a(1) = 0$;

(ii) $\log_a(a^t) = t, a^{\log_a(x)} = x$;

(iii) $\log_a(b^x) = x\log_a(b), \log_b(y) = \dfrac{\log_a(y)}{\log_a(b)}$.

Preuve : on applique juste les propriétés des bijections continues pour la définition des logarithmes et le (ii). Pour le (i) et le (iii), on note U et V les deux côtés des inégalités proposées et on remarque que $U = V$ si et seulement si $a^U = a^V$, ce qui se vérifie avec un petit calcul, excellent pour se garder en forme...

On conclut cette section par une propriété fameuse des limites :

Propriété 6 : Dans une limite, une exponentielle l'emporte sur une puissance, une puissance l'emporte sur un logarithme. Autrement dit, si $a \in \mathbf{R}_+^*, c > 1$, et si $b, d \in R$, soit la fonction $f(x) = a^x.x^b.(\log_c(x))^d$.

Pour trouver sa limite ℓ quand $x \longrightarrow +\infty$, on regarde d'abord a : si $a > 1$, $\ell = +\infty$, si $0 < a < 1$, $\ell = 0$. si $a = 1$, on doit alors regarder b : si $b > 0$, $\ell = +\infty$, si $b < 0$, $\ell = 0$. Enfin, si $a = 1, b = 0$, la limite dépend de d : $\ell = +\infty$ si $d > 0$, $\ell = 0$ si $d < 0$. Enfin quand $a = 1, b = d = 0$, $f(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

Preuve :

Si $A > 1$, on a $A = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$, et donc $A^n > 1 + n.\alpha$ d'après la formule du binôme, ce qui prouve que pour tout x on a $A^x \geq A^{E(x)} > 1 + E(x).\alpha > 1 + (x-1).\alpha$.

Posons $T = 2(1 - 1/\alpha)$. Si $x \geq T$, on a $1 + (x-1).\alpha \geq (\alpha/2)x$. D'où $A^x > (\alpha/2).x$ et $2/\alpha > x/A^x$.

Autrement dit on a trouvé un intervalle $I = [T, +\infty[$ et un réel $u > 0$ tel que $A^x/x < u$ si $x \in I$. La fonction $x \mapsto x/A^x$ est bornée au voisinage de $+\infty$. Comme elle est définie et donc continue et bornée sur l'intervalle fermé de brones 0 et T, on a donc : pour tout $A > 1$, la fonction $x \mapsto x/A^x$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Si par exemple $a > 1$, en écrivant $x/a^x = (x/(\sqrt{a})^x).(1/(\sqrt{a})^x)$, c'est-à-dire vu ce qui précède : bornée $\times(1/$ limite $+\infty)$, on voit que $x/a^x \to 0$.

D'où si $b > 0$, $x^b/a^x = [x/(a^{1/b})^x]^b \longrightarrow 0$.

En posant $t = a^x$, on obtient $x/a^x = \log_a(t)/t$, d'où les limites données pour les produits d'une puissance et d'un log. En listant les différents cas, on les épuise en obtenant les résultats annoncés : le lecteur pas épuisé pourra le vérifier.

Applications : comment définir et étudier les fonctions circulaires ?

On ne fera pas les démonstrations par souci de concision, et parce que les problèmes laissés en suspens sont pour l'essentiel géométriques.

D'abord, soient un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$. On note Γ le demi-cercle positif, ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$ et $y \geq 0$. On considèrera aussi le demi-carré $(\mathcal{C})$, $A - D - E - C$ avec $D(1,1), E(-1,1)$.

Si $x \in [-1,1]$, il y a un unique point de Γ d'abscisse x, c'est le point $M[x] = M(x,y)$ avec $y = \sqrt{1-x^2}$. On définit la longueur $L(x)$ de l'arc AM comme la borne supérieure des longueurs $C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}C_n$ des lignes brisées $C_1C_2...C_n$ prises sur Γ, aux abscisses décroissantes, et partant de $C_1 = A$, et jusqu'à $C_n = M[x]$.

Ces lignes ont des longueurs majorées, en effet si pour tout $C \in \Gamma$, on pose C' = le point d'intersection de $[OC)$ et de $(\mathcal{C})$, alors la somme $C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}C_n$ est toujours inférieure à $C_1'C_2' + C_2'C_3' + ... + C_{n-1}'C_n' \leq AD + DE + EB = 4$.

On définit ainsi une fonction $x \mapsto L(x)$ de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$, en notant $\pi = L(-1)$ la longueur de l'ensemble du demi-cercle.

On voit facilement que $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \Rightarrow L(x_1) > L(x_2)$ et $L(x_1) - L(x_2) <$ longueur sur $(\cap C)$ de $M_1'M_2'$.

On en tire que $x \mapsto L(x)$ est une fonction continue et strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.

Sa réciproque est la fonction cosinus, qu'on prolonge en une fonction paire et $2\pi-$périodique de $\mathbf{R}$ sur $[-1,1]$. De même la fonction $L(x) \mapsto M[x] \mapsto y$ donne la fonction sinus.

On montrera notamment, en trouvant leurs significations géométriques, les relations suivantes, valables pour tous $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$:

(i) $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1, \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta), \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$;

(ii) $\cos(\theta + \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$; $\sin(\theta + \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')$;

(iii) $\cos(-\theta) = \cos(\theta), \sin(-\theta) = -\sin(\theta), \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$.

On étudiera aussi la fonction $\theta \mapsto \tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, qui est impaire, $\pi-$périodique, définie en $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Ces trois fonctions, $\cos, \sin, \tan$, restreintes respectivement à $[0,\pi], [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}],]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, sont des bijections continues respectivement décroissantes, croissantes et croissantes, d'images $[-1,1], [-1,1]$ et $\mathbf{R}$.

Leurs réciproques sont les fonctions Arc sinus (Arc sin), Arc cosinus (Arc cos), Arc tangente (Arc tan).