**Fiche de cours 2 - Suites de réels.**

Généralités sur les suites.

**Définition :** Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie à partir dun certain rang au moins. Limage $u(n)$ se note plutôt $u_n$, et sappelle la valeur du terme de rang (ou d'ordre) $n$. L'expression "terme de rang $n$" désigne le nombre et le numéro.
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (si elle est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, sinon cest $(u_n)_{n\geq n_0}$ par exemple.
Exemples : Une suite constante a une infinité de termes, mais tous ont la même valeur. La suite $[(-1)^n]_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$ a tous ses termes de deux valeurs différentes. En revanche la suite des entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n, u_n = n$, n'a que des termes différents.
**Définitions :**
**(A)** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tous $n, m$ tels que $n < m$ on a $u_n \leq u_m$. On peut dire aussi: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n$, $u_n \leq u_{n+1}$, ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ou encore, pour une suite à valeurs strictement positives: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

On définit de même strictement croissante, décroissante, strictement décroissante. On dit quune suite est monotone si elle est croissante ou décroissante. On dit quelle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
**(B)** Une suite est majorée par un réel $M$ si tous ses termes sont $\leq M$. Si on peut trouver un tel réel, on dit juste que la suite est majorée. On définit de même une suite minorée. Une suite à la fois majorée et minorée est bornée.

Remarque: Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Limites des suites.

**Définition- suite convergente :** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers le réel $\ell$, ou a pour limite $\ell$, ou encore converge vers $\ell$, si: Pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, il y a un rang $N$ (dépendant en général de $\varepsilon$), à partir duquel tous les termes de la suites sont dans lintervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ , ou encore:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Si cette condition est remplie on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, ou parfois $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Si la suite a une limite $\ell$ dans $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est convergente.

Exemples:

(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire, cest-à-dire égale à une constante $C$ à partir dun certain rang $n_0$, converge vers $C$. On peut en effet vérifier que la phrase "$u_n$ converge vers $C$" est vraie :

Soit $\varepsilon > 0$. Alors si on pose $N = n_0$, on aura : $n \geq N \Rightarrow |u_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$. Donc le rang $N = n_0$ convient, pour chaque $\varepsilon$, et la définition est satisfaite.

(2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire la suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}, ...$, converge vers 0.

En effet si $\varepsilon > 0$ est donné, cherchons à quelle condition on a : $|u_n| < \varepsilon$ :

$$|u_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \iff E(\frac{1}{\varepsilon}) \leq n.$$

Le rang $N = N(\varepsilon) = E(\frac{1}{\varepsilon})$ convient donc, si $n \geq N$, on a bien $|u_n| < \varepsilon$. On a montré qu'un tel $N$ était défini pour tout $\varepsilon > 0$, la définition est donc satisfaite.

**Définitions- limites infinies :**

(*) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, ou a pour limite $+\infty$, si: Pour tout réel $A$, il y a un rang $N$ (dépendant de $A$), à partir duquel tous les termes de la suites sont dans lintervalle $]A, +\infty[$ , ou encore:

$$\forall A, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$$

Si cette condition est remplie on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ou parfois $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(*) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, ou a pour limite $-\infty$, si: Pour tout réel $A$, il y a un rang $N$ (dépendant de $A$), à partir duquel tous les termes de la suites sont dans lintervalle $]-\infty, A[$ , ou encore:

$$\forall A, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A$$

Si cette condition est remplie on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, ou parfois $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

De telles suites *ne sont pas appelées convergentes.*

Exemple :

(3) Si $p \in \mathbb{N}^*$, la suite des puissances $p$ entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^p$, tend vers $+\infty$.

Pour vérifier ce fait, donnons nous un réel $A$ quelconque. Si $A \leq 0$, tout terme $u_n$ tel que $n \geq 1$ vérifie $u_n = n^p \geq 1 > A$, dans ce cas on pose $N = 1$. Si $A > 0$, posons $N = E(A) + 1$ Alors $N$ est un entier positif, et on aura pour tout $n \geq N$, que : $u_n = n^p = n \times n \times ... \times n \geq n \times 1 \times ... \times 1 = n \geq N = E(A) + 1 > A$.

On a donc expliqué comment, dans tous les cas, trouver $N$ tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n > A$.

Ainsi la définition est satisfaite et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

(4) Si $X$ est un réel tel que $X > 1$, la suite des puissances de $X$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = X^n$, tend vers $+\infty$.

Pour vérifier ce fait, donnons nous un réel $A$ quelconque. Si $A \leq 1$, tout terme $u_n$ tel que $n \in \mathbb{N}$ vérifie $u_n = X^n \geq X^0 = 1 > A$, dans ce cas on pose $N = 1$.

Si $A > 0$, remarquons qu'on peut écrire $X$ sous la forme : $X = 1 + \alpha$ pour un $\alpha > 0$ (c'est équivalent à dire $X > 1$). On a alors l'inégalité : $\forall n, X^n = (1+\alpha)^n > 1 + n.\alpha$. Cette inégalité provient par exemple de la formule du binôme : $(1+\alpha)^n = 1 + \binom{n}{1}.\alpha + \binom{n}{2}.\alpha^2 + ... = 1 + n.\alpha + \dfrac{n(n-1)}{2}.\alpha^2 + ... > 1 + n\alpha$.

Posons alors $N = E(\dfrac{A-1}{\alpha}) + 1$ qui est bien un entier, positif car $A \geq 1$. Alors on a si $n \geq N$ :

$X^n = (1+\alpha)^n > 1 + n.\alpha \geq 1 + N.\alpha = 1 + (E(\dfrac{A-1}{\alpha}) + 1).\alpha > 1 + (\dfrac{A-1}{\alpha}).\alpha = 1 + (A-1) = A$.

On a donc expliqué comment, dans tous les cas, trouver $N$ tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n > A$.

Ainsi la définition est satisfaite et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} X^n = +\infty$.

## Propriétés des suites ayant des limites et calculs sur les limites.

D'abord, pour une suite ayant une limite, les termes ne peuvent pas se répartir "n'importe où" :

**Propriété :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ayant pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(1) Si $\ell \in \mathbb{R}$, la suite est bornée.

(2) Si $\ell = -\infty$, la suite est majorée et non minorée ; si $\ell = -\infty$, la suite est majorée et non minorée.

(3) Une suite ne peut pas avoir deux limites distinctes.

Preuve :

(1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, la définition de cette phrase est vérifiée et s'applique *pour toute valeur* de $\varepsilon > 0$. En particulier on peut l'appliquer pour $\varepsilon = 1$ : on en déduit qu'il existe $N$ tels que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, ...$ sont dans l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$.

Les nombres $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ et $\ell - 1$, forment une famille finie de nombres, ils ont donc un plus petit élément que nous noterons $a$. De même les nombres $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ et $\ell + 1$, forment une famille finie de nombres, ils ont donc un plus grand élément que nous noterons $b$. Les termes de la suite sont tous entre $a$ et $b$, donc la suite est à la fois minorée (par exemple par $a$) et majorée (par exemple par $b$), elle est bornée.

(2) La définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ prouve que pour tout nombre $A$, il existe des termes $u_n < A$ : autrement dit la suite n'est pas minorée. En revanche en appliquant la définition par exemple à $A = 0$, on trouve un $N$ tel que $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, ...$ soient tous $< 0$. La suite $u$ sera alors majorée par exemple par le plus grand des réels : $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ et $A = 0$.

Le raisonnement pour $\ell = +\infty$ est tout-à-fait identique.

(3) Une suite ne peut pas avoir à la fois une limite infinie et une autre limite, finie ou infinie, car le fait d'être par exemple minorée et pas majorée esclut les autres cas décrit en (1) et (2).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle avoir deux limites finies distinctes $\ell \neq \ell'$ ? Supposons-le, et montrons qu'on aboutit à une contradiction.

Soit $d = \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$ la demi-distance, sur une droite graduée, entre $\ell$ et $\ell'$. Les intervalles ouverts $]\ell - d, \ell + d[= I$ et $]\ell' - d, \ell' + d[$, sont disjoints puisque l'un a pour borne supérieure le milieu $\dfrac{\ell + \ell'}{2}$ qui est aussi la borne inférieure de l'autre. Si on avait à la fois : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, on pourrait en appliquant les définitions trouver un rang $N$ à partir duquel tous les termes $u_n$ sont dans $I$, mais aussi un rang $N'$ à partir duquel tous les termes $u_n$ sont dans $I'$. En prenant un rang $n$ plus grand que $N$ et $N'$ à la fois (par exemple $n = max(N, N')$), on aurait $u_n \in I$, $u_n \in I'$, alors que $I \cap I' = \emptyset$ : c'est absurde, l'hypothèse de départ est à rejeter, la limite est forcément unique.

Ordre et "passages à la limite"

Dans la propriété suivante on convient que $-\infty < x < +\infty$ pour tout réel $x$.

**Propriétés** $(O_1)$ **:** Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel :

(1) Si $\ell > x$, alors on peut trouver un rang $N$ tel que : $\forall n \geq N, u_n > x$ ;

(2) Si $\ell < x$, alors on peut trouver un rang $N$ tel que : $\forall n \geq N, u_n < x$ ;

(3) Si $u_n \leq x$ pour tout $n$, ou pour tout $n$ à partir d'un certain rang, ou simplement pour une infinité de valeurs différentes de $n$, alors $\ell \leq x$.

(4) Si $u_n \geq x$ pour tout $n$, ou pour tout $n$ à partir d'un certain rang, ou simplement pour une infinité de valeurs différentes de $n$, alors $\ell \geq x$.

**Propriétés $(O_2)$ :**

(1) Si les suites $u, v, w$ vérifient $u_n \leq v_n \leq w_n$ au moins pour tout $n$ à partir d'un certain rang, alors :

- Si $u$ tend vers $+\infty$, $v$ et $w$ aussi ;
- Si $w$ tend vers $-\infty$, $u$ et $v$ aussi ;
- Si $u$ et $w$ tendent vers le même réel $\ell$, alors on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ ("théorème des gendarmes").

(2) Soient deux suites $u, v$ et un réels $\ell$ tels que : $\forall n, |u_n - \ell| \leq v_n$. Alors si $v$ tend vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Calcul sur les limites.

Si $u$, $v$ ont pour limites $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors les suites $u + v, u \times v, 1/u$, obéissent aux tableaux suivants :

$(Add)$ $\quad (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

| $\ell \ddots \ell'$ | $-\infty$ | $\ell' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | f. i. |
| $\ell \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $\ell + \ell'$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | f. i. | $+\infty$ | $+\infty$ |

On a mieux : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la même limite que $v$.

$(Mult)$ $\quad (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

| $\ell \ddots \ell'$ | $-\infty$ | $\ell' \in \mathbb{R}^*_-$ | $0$ | $\ell' \in \mathbb{R}^*_+$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | f. i. | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell \in \mathbb{R}^*_-$ | $+\infty$ | $\ell.\ell'$ | $0$ | $\ell.\ell'$ | $-\infty$ |
| $0$ | f. i. | $0$ | $0$ | $0$ | f. i. |
| $\ell \in \mathbb{R}^*_0$ | $-\infty$ | $\ell.\ell'$ | $0$ | $\ell.\ell'$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | f. i. | $+\infty$ | $+\infty$ |

On a mieux : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

$(Inv)$ $\quad (\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$

| $\ell$ | $-\infty$ | $\ell \in \mathbb{R}^*$ | $0$ | $0$ et $\forall n, u_n > 0$ | $0$ et $\forall n, u_n < 0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim \frac{1}{u}$ | $0$ | $\frac{1}{\ell}$ | f. i. | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

De plus, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite non nulle, la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est forcément définie à partir d'un certain rang.

<u>Démonstrations de quelques-unes de ces propriétés</u>

Sur l'ordre :

$(O_1)$ (1) Si une suite a une limite $\ell$ et si $\ell > x$, alors :

(i) ou bien $\ell = +\infty$. La définition de la limite s'écrit alors : $\forall A, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$. En appliquant ceci avec $x = A$, on obtient bien un rang $N$ à partir duquel $u_n > A = x$.

(ii) ou bien $\ell \in \mathbb{R}$. La définition de la limite s'écrit alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En appliquant ceci avec le réel $\varepsilon =$ la distance $\ell - x > 0$ entre $\ell$ et $x$ ; on obtient bien un rang $N$ à partir duquel $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En particulier $n \geq N \Rightarrow u_n > \ell - \varepsilon = \ell - (\ell - x) = x$.

$(O_1)$ (3) Si une suite a une limite $\ell$ et si $u_n \leq x$, pour une infinité de valeurs de $n$, alors il est impossible de trouver un rang à partir duquel $u_n$ soit toujours $> x$, donc d'après le (1) il est impossible d'avoir $\ell > x$, d'où $\ell \leq x$.

Propriétés $(O_2)$ :

Théorème des gendarmes : si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim u = \lim w = \ell$, montrons que $\lim v = \ell$. Les définitions de la limite sont vérifiées pour $u$ et $w$ :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

et

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Montrons que ceci est vraie aussi pour la suite $v$ : partons d'un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. En appliquant (i) on trouve un rang $N_u$ à partir duquel $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. De même en appliquant (ii) on trouve un rang $N_w$ à partir duquel $w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Posons $N = max(N_u, N_w)$.

Si $n \geq N$, on aura à la fois $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[ \Rightarrow u_n > \ell - \varepsilon$, et $w_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[ \Rightarrow w_n < \ell + \varepsilon$, donc finalement : $\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon$.

Ce rang $N$ existant pour toute valeur de $\varepsilon$, on a bien $\lim v = \ell$.

(2) Soient deux suites $u, v$ et un réels $\ell$ tels que : $\forall n, |u_n - \ell| \leq v_n$. Alors si on fixe $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang $N$ à partir duquel $|v_n| < \varepsilon$, puisque $\lim v = 0$. Si $n \geq N$ on aura alors $|u_n - \ell| \leq v_n \leq |v_n| < \varepsilon$, ce qui est la définition de $\lim u = \ell$.

Propriétés d'opérations :

$(Add)$ Par exemple, prouvons que si $\lim u = \ell, \lim v = \ell'$ sont des réels, alors $\lim(u+v) = \ell + \ell'$.

On aura : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |v_n - \ell'| < \varepsilon$.

Partons de $\varepsilon > 0$ quelconque. On peut appliquer les définitions précédentes avec $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. On trouvera des rangs $N_u$ et $N_v$ tels que :

$\forall n \geq N_u \Rightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\forall n \geq N_v \Rightarrow |v_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Si on pose $N = max(N_u, N_v)$, on aura finalement :

$\forall n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Le rang $N$, qu'on peut ainsi trouver pour chaque valeur de $\varepsilon > 0$, convient, la définition est satisfaite, la suite $(u+v)$ tend bien vers $\ell + \ell'$.

$(Mult)$ Pour le "mieux", supposons que $u$ soit bornée, $\forall n, |u_n| < M$, pour un réel $M$ fixé. Si $(v_n)_n$ tend vers 0, et si $\varepsilon > 0$ est donné, appliquons la définition de $\lim v = 0$ au réel $\varepsilon / M > 0$. On trouve $N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |v_n| < \varepsilon / M$. On aura alors :

$n \geq N \Rightarrow |u_n.v_n| = |u_n|.|v_n| < M(\varepsilon/M) = \varepsilon$.

Prouvons maintenant que si $\lim u = \ell, \lim v = \ell'$ sont des réels, alors $\lim(u+v) = \ell + \ell'$. On a en effet pour tout $n$ : $(u_n.v_n = \ell.\ell' + u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)$. La suite étudiée apparaît comme somme de la constante $\ell.\ell'$, du produit d'une suite tendant vers 0 par la suite $(u_n)_n$ qui est bornée (car convergente), et du produit d'une suite tendant vers 0 par la constante $\ell'$. D'après les diverses propriétés déjà démontrées, $(u_n.v_n)_n$ tend vers $\ell.\ell'$.

$(Inv)$ Si $(u_n)_n$ tend vers $\ell > 0$, il existe un rang à partir duquel $u_n > \ell/2 > 0$, et à partir de ce rang $u_n$ ne s'annule plus donc $1/u_n$ est définie (et même bornée car positive et $< 2/\ell$). Le reste des preuves est similaire aux calculs et raisonnements précédents.

Suites non convergentes, suites extraites.

Supposons qu'on veuille prouver qu'une suite donnée $(u_n)_n$ ne tend pas vers le réel $\ell$. Elle doit donc vérifier la négation de la définition :

"$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$"

C'est-à-dire :

$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon$

Ou encore : on peut trouver des $u_n$ pour des $n$ aussi grands qu'on veut (donc : "pour une infinité de $n$"), tels que la distance $|u_n - \ell|$ reste "assez grande", supérieure à un même nombre $\varepsilon > 0$.

Pour exprimer une telle idée, la bonne notion est celle de sous-suite :

Définition : Soit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle sous-suite ou suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour laquelle il y a une *suite strictement croissante d'entiers* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall k, v_k = u_{n_k}$.

Exemple : $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La propriété fondamentale est la suivante :

Propriété : Si la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, toute suit eextraite de $u$ a aussi pour limite $\ell$.

Preuve : Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $u$, et remarquons tout de suite que $n_0 < n_1 < ...$ entraîne $n_0 \geq 0, n_1 \geq n_0 + 1 \leq 0 + 1 = 1, n_2 \geq n_1 + 1 \geq 1 + 1 = 2$, etc. En fait on a $\forall k, n_k \geq k$.

Si $\ell = +\infty$ par exemple, soit $A$ un réel quelconque. Comme $\lim u = +\infty$ on peut trouver un rang $N = N(A)$ tel que $n > N \Rightarrow u_n > A$. On aura alors si on pose $K = N$, $k > K \Rightarrow n_k \geq k > K = N \Rightarrow v_k = u_{n_k} > A$. Pour tout $A$, on peut donc trouver un $K = K(A)$, donc $v_k \to +\infty$.

Le raisonnement est identique dans les autres cas.

On en tire comme conséquences :

Propriété : (1) Si on se donne une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $u$ n'a pas pour limite $\ell$ si et seulement si on peut trouver au moins une suite $v$ extraite de $u$ et un réel $r > 0$ tels que : $\forall k, |v_k - \ell| \geq r$.

(2) Si on se donne une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $u$ n'a pas pour limite $+\infty$ si et seulement si on peut trouver au moins une suite $v$ extraite de $u$ et un réel $A$ tels que : $\forall k, v_k \leq A$.

(3) Si on se donne une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et si on peut trouver au moins deux suites $v$ extraites de $u$ qui ont des limites différentes, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Remarque : La réciproque du (3) est aussi vraie, mais plus dure à prouver. On peut même prouver que de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Propriété de la borne supérieure et limites des suites.

Le fait que $\mathbb{R}$ soit sans trou, qui sexprime par la propriété de la borne supérieure, permet de prouver que certaines suites ont une limite, même sans connaître d'avance la valeur de cette limite.

**Théorème:**
(a) Une suite monotone a toujours une limite, finie ou infinie.
(b) Une suite croissante et majorée est convergente, et sa limite est la borne supérieure de ses valeurs.
(c) Une suite décroissante et minorée est convergente, et sa limite est la borne inférieure de ses valeurs.

Preuve : (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. L'ensemble des valeurs prises $E = \{u_0, u_1, u_2, ...\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = u_n\}$ est alors non vide et majoré, il a une borne supérieure $s = sup(E)$ qui est la borne supérieure des valeurs prise par la suite.

La suite est majorée par $s$ on a donc : $\forall n, u_n \leq s$.

Par ailleurs, $s$ est *le plus petit* majorant de $E$, donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, le réel $s - \varepsilon$ ne majore pas $E$. Il existe donc un $x \in E$ tel que $s - \varepsilon < x$, autrement dit il y a $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = x > s - \varepsilon$. La suite étant croissante, on aura : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N > s - \varepsilon$.

On peut trouver ce $N$ pour tout $\varepsilon > 0$, la définition de la convergence est donc satisfaite, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} = s$.

(c) Identique au (b), en remplaçant à chaque fois "majorée" par "minorée", "¿" par "¡", etc.

(a) Soit une suite monotone, par exemple croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elle est majorée elle a une limite d'après le (a). Supposons qu'elle ne soit pas majorée. Montrons qu'alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A$ un réel fixé. La suite n'étant pas majorée, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. La suite étant croissante, on aura : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq u_N > A$.

On peut trouver ce $N$ pour tout $A$, la définition de la limite infinie est donc satisfaite, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

Avec ces propriétés, on peut mettre en œuvre un "protocole d'approximation": pour approcher un réel inconnu, on l'encadre par deux suites, monotones en sens inverse, qui tendent vers lui. On dit qu'on a alors des suites adjacentes.

**Définition:** les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si:
(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
(iii) $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

**Théorème:** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors elles sont convergentes, de même limite $\ell$, et pour tous entiers $n, m$ on a $u_n \leq \ell \leq v_m$. De plus $\ell$ est lunique réel vérifiant toutes ces inégalités, ou simplement vérifiant : $\forall n, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Preuve : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; elle tend vers 0 donc c'est le cas (b) du théorème, et on doit avoir : $\forall n, u_n - v_n \leq 0$, donc $\forall n, u_n \leq v_n$.

En fait on a mieux : si $p, q$ sont deux entiers quelconques, en choisissant un entier $n$ plus grand que $p$ et $q$ à la fois, et en utilisant la monotonie des suites, on obtient : $u_p \leq u_n \leq v_n \leq v_q$.

Ainsi la suite $u$ est croissante et majorée par n'importe quel terme de $v$, donc elle a une limite $\ell$ qui vérifie : $\forall q, \ell \leq v_q$. Et la suite $v$ est décroissante et minorée par n'importe quel terme de $u$, donc elle a une limite $\ell'$ qui vérifie : $\forall p, \ell' \geq u_p$.

Finalement $u_n - v_n$ tend vers 0 et vers $\ell - \ell'$, donc $\ell = \ell'$. On a bien : $\forall p, q, u_p \leq \ell \leq v_q$ et si $x$ vérifie toutes ces inégalités ou simplement : $\forall n, u_n \leq x \leq v_n$, on obtient "en passant à la limite" : $\ell \leq x \leq \ell$ donc $x = \ell$.

L'intérêt de ces notions est que les conditions pour que deux suites soient adjacentes sont simples à vérifier.

Une autre formulation de ce théorème est le théorème des segments emboîtés:

**Théorème ("théorème des segments emboîtés") :** Si $I_n = [a_n, b_n]$ est une suite dintervalles fermés bornés non vides "emboîtés", c'est-à-dire tels que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \supseteq I_{n+1}$, et si leur longueur $b_n - a_n$ tend vers 0, alors lintersection de tous les $I_n$ est un singleton $\{c\}$ (et donc nest pas vide).

Preuve : la condition $\forall n, I_n \supseteq I_{n+1}$ entraîne $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ donc la suite $(a)$ est croissante, la suite $(b)$ décroissante et comme leur différence tend vers 0, ces suites sont adjacentes et tendent vers un même réel $c$, qui est le seul réel vérifiant : $\forall n, a_n \leq c \leq b_n$, c'est-à-dire : $\forall n, c \in I_n$.

Suites de Cauchy

On écrit un critère de convergence sans connaître d'avance la limite, même pour les suites non monotones.

**Définition:** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si:

"Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que
tous les termes, à partir du rang $N$, sont distants les uns des autres de moins de $\varepsilon$."

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N, |u_n - u_n| < \varepsilon.$$

**Propriété :** Une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve :

**Sens I : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, disons de limite $\ell \in \mathbb{R}$, elle est de Cauchy.**

Hypothèse : $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', |u_n - \ell| < \varepsilon'$ ;

Conclusion souhaitée : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N, |u_n - u_n| < \varepsilon$.

Partons de $\varepsilon > 0$ et appliquons l'hypothèse avec $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. On obtient un rang $N'$ à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon'$. Si on prend $N = N'$, on aura pour tout couple d'entiers $(n, n')$ tels que $n, n' \geq N$ :

$|u_n - u_{n'}| = |(u_n - \ell) + (\ell - u_{n'})| \leq |u_n - \ell| + |u_{n'} - \ell| < \varepsilon' + \varepsilon' = (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$.

On peut trouver ce rang $N$ pour tout $\varepsilon > 0$, la définition est donc satisfaite, la suite est bien de Cauchy.

**Sens II : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est convergente (largement hors programme).**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On va faire apparaître une limite pour cette suite en essayant de découvrir un réel autour duquel "les termes s'accumulent".

D'abord, cette suite est bornée : en effet en appliquant la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1 > 0$, on trouve un rang $N_1$ à partir duquel $|u_n - u_{n'}| < 1$. En particulier $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - u_{N_1}| < 1 \Rightarrow |u_n| = |(u - n - u_{N_1}) + u_{N_1}| < 1 + |u_{N_1}|$.

Ainsi $|u_n|$ est majoré, pour tout $n$, par un réel fixe $M$, par exemple par le plus grand des réels $|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N_1-1}|, 1 + |u_{N_1}|$, et la suite est bornée.

Imaginons un curseur qu'on déplace le long de la droite graduée qui représente $\mathbb{R}$, en pointant le réel $\alpha$. Quand $\alpha$ est loin vers $-\infty$, typiquement si $\alpha < -M$, il n'y a aucun terme de la suite avant $\alpha$.

On déplace $\alpha$ vers la droite, après la valeur $M$, on aura au contraire dépassé tous les termes de la suite.

On va essayer de trouver l'endroit où s'accumulent "la plupart" des termes.

Pour tout $\alpha$ notons $\mathbb{N}(\alpha)$ l'ensemble des entiers $n$ tels que $u_n < \alpha$. Ainsi : $\mathbb{N}(\alpha) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < \alpha\}$ regroupe les numéros des termes qui sont avant $\alpha$.

Posons $E = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbb{N}(\alpha) \text{ est un ensemble fini }\}$. $E$ est donc l'ensemble des réels $\alpha$ pour lesquels seul un nombre fini de termes de la suite sont avant $\alpha$.

On a d'après ce qui précède $-M \in E$ puisqu'aucun terme n'est avant $-M$, donc $\mathbb{N}(-M) = \emptyset$, et $M \notin E$ puisque tous les termes étant avant $M$, l'ensemble $\mathbb{N}(M) = \mathbb{N}$ est bien infini.

Notons que si $\alpha \in E$, c'est que $\mathbb{N}(\alpha)$ est fini. Si $x < \alpha$, tout terme $u_n$ tel que $u_n < x$ vérifie aussi $u_n < \alpha$ donc $\mathbb{N}(x) \subseteq \mathbb{N}(\alpha)$ et $\mathbb{N}(x)$ est fini.

Au contraire si $\alpha \notin E$, $\mathbb{N}(\alpha)$ est infini. Si $x > \alpha$, un terme $u_n$ tel que $u_n < \alpha$ vérifie aussi $u_n < x$, donc $\mathbb{N}(x) \supseteq \mathbb{N}(\alpha)$ et $\mathbb{N}(x)$ est infini comme $\mathbb{N}(\alpha)$.

Conclusion : (i) $\alpha \in E \Rightarrow ]-\infty, \alpha] \subseteq E$ ; (ii) $\alpha \notin E \Rightarrow [\alpha, +\infty[ \cap E = \emptyset$.

En particulier $E \cap [M, +\infty[ = \emptyset$ donc $M$ est un majorant de $E$. L'ensemble non vide et majoré $E$ a donc une borne supérieure $\ell$, et on va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$.

Soit $\varepsilon > 0$ ; appliquons d'abord l'hypothèse de départ, à savoir que la suite est de Cauchy. On peut donc trouver un rang $N$ à partir duquel les termes ne varient pas trop les uns par rapport aux autres, mettons $|u_n - u_{n'}| < \varepsilon/2$ si $n, n' \geq N$ en appliquant la définition avec $\varepsilon/2$ :

$$\forall n, n' \geq N, |u_n - u_{n'}| < \varepsilon/2.$$

Ensuite $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $E$ car il est plus petit que $\ell$, donc il existe $\alpha \in E$ tel que $\ell - \varepsilon < \alpha$. En fait, d'après le (i) ci-dessus, on a $\ell - \varepsilon \in E$, donc l'ensemble $\mathbb{N}(\ell - \varepsilon)$ est fini, il y a donc un entier $N'$ à partir duquel il n'y a plus aucun élément de $\mathbb{N}(\ell - \varepsilon)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq N', u_n \geq \ell - \varepsilon.$$

On pose $N(\varepsilon) = max(N, N')$, et on va prouver que : $\forall n \geq N(\varepsilon), |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Soit un indice $n \geq N(\varepsilon)$. Comme $n \geq N'$, on a $u_n \geq \ell - \varepsilon$.

Par ailleurs le nombre $\beta = \ell + \varepsilon/2$ n'est pas élément de $E$ puisque $\beta > \ell = sup(E)$. Donc $\mathbb{N}(\beta)$ doit être infini. En particulier il contient certainement un entier $n'$ tel que $n' \geq N$ et $n' \in \mathbb{N}(\beta)$ c'est-à-dire $u_{n'} < \beta = \ell + \varepsilon/2$. Comme $n \geq N(\varepsilon) \geq N$ et $n' \geq N$, on a forcément $\forall n, n' \geq N, |u_n - u_{n'}| < \varepsilon/2$. On peut donc écrire :

$$u_n = (u_n - u_{n'}) + u_{n'} < (\varepsilon/2) + \ell + \varepsilon/2 = \ell + \varepsilon.$$

On a donc bien vérifié que, pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, on aura :

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

ou encore :

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Comme on peut trouver ce rang $N(\varepsilon)$ pour chaque valeur de $\varepsilon$, la suite est bien convergente vers $\ell$, et le théorème est prouvé.

Remarque : On pourrait vérifier que $E = ]-\infty, \ell[$ ou $E = ]-\infty, \ell]$. On obtient par exemple le premier cas si $\forall n, u_n = -1/n$, ou si $\forall n, u_n = (-1)^n/n$, et le deuxième si, par exemple, $\forall n, u_n = 1/n$, ou si $\forall n, u_n = 0$.