Licence de Sciences et Technologies **EM21 - Analyse**

Fiche de cours 1 - Nombres réels.

On connaît les ensembles suivants, tous munis d'une addition, d'une multiplication, et d'une relation d'ordre $\leq$ compatibles entre elles (c'est-à-dire vérifiant les propriétés bien connues qu'on utilisera notamment dans les exercices) :

Ensemble $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Il vérifie le principe de récurrence, qu'on peut formuler de la manière suivante :

Si une propriété $\mathcal{P}[n]$, mettant en jeu un entier n,
(i) est vraie au rang 0 ("$\mathcal{P}[0]$ est vraie"),
(ii) et si l'implication $\mathcal{P}[n] \Rightarrow \mathcal{P}[n+1]$ est vraie pour tout n ("Pour tout entier n, on a : si $\mathcal{P}[n]$ est vraie, alors $\mathcal{P}[n+1]$ est vraie"),
alors la propriété est vraie pour tout entier ("$\mathcal{P}[n]$ est vraie pour tout n").

Ce principe sera abondamment utilisé quand on étudiera les suites de réels.

Ensemble $\mathbb{Z}$

Les nombres naturels ne permettent pas de calculer les différences, du moins pas dans tous les cas.

On introduit donc les nombres négatifs, et l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, union de $\mathbb{N}$ et des oppos des entiers non nuls: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Ensemble $\mathbb{Q}$

De la même manière, les nombres naturels ne permettent pas de calculer les quotients, du moins pas dans tous les cas. On définit pour cela l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, qui sont les fractions d'entiers. Une fraction est un couple d'entiers (a, b) avec $b \neq 0$, qu'on note a/b ou $\dfrac{a}{b}$. Deux fractions sont égales: $a/b = a'/b'$, si et seulement si $ab' = ba'$.

On rappelle qu'en additionnant, soustrayant, multipliant ou divisant les fractions, on obtient toujours des fractions (éléments de $\mathbb{Q}$):

$$a/b + a'/b' = (ab' + ba')/(bb'); a/b - a'/b' = (ab' - ba')/(bb'); (a/b)(a'/b') = (aa'/bb').$$

On a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (par exemple l'entier relatif n est égale à la fraction $n/1$) et la relation usuelle $\leq$ est définie entre nombres relatifs (ainsi que les sous-ensembles comme $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{Z}_-$).

Pourquoi définir des nombres réels ? Pour compléter les trous de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

On peut obtenir un trou pour chaque couple (A, B) de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$, tels que:
(i) A est un intervalle commençant, c'est-à-dire que, si $a \in A$, on a $]-\infty, a]_{\mathbb{Q}} \subseteq A$ ($]-\infty, a]_{\mathbb{Q}}$ désignant l'ensemble des $x \in \mathbb{Q}$ tels que $x \leq a$).
(ii) B est un intervalle finissant, c'est-à-dire que si $b \in B$, $[b, +\infty[_{\mathbb{Q}} \subseteq B$.
(iii) $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset$,
et pourtant A n'est pas un intervalle $]-\infty, c]$ car A n'a pas de plus grand élément, et B n'est pas un intervalle $[c, +\infty[$, car B n'a pas de plus petit élément : il manque un nombre qui "marquerait la limite" entre A et B.

Exemples :

(A) Si A est l'ensemble des rationnels de cube < 2 et B l'ensemble des rationnels de cube ≥ 2, il y a un "trou" entre les deux.

(B) Si A est l'ensemble des rationnels de cube < 8 et B l'ensemble des rationnels de cube ≥ 8, il n'y a pas de "trou" entre les deux car $c = 2$ est ce fameux point limite. On a en fait $A =]-\infty, 2[_{\mathbb{Q}}$, et $B = [2, +\infty[_{\mathbb{Q}}$.

Dans le cas (B), $8 = 2^3$ donc les deux ensembles encadrent 2 qui est la racine cubique de 8. Dans le cas (A), la limite entre A et B se situe au niveau de la racine cubique de 2, mais comme un tel nombre n'existe pas dans $\mathbb{Q}$, il y a un "trou" entre les deux !

On peut définir l'ensemble des réels en considérant l'ensemble de ces couples (A, B). C'est une des constructions possibles des réels (Dedekind). On admettra qu'on peut définir ainsi rigoureusement l'ensemble $\mathbb{R}$, sans trou. On adopte une autre logique: on va énoncer sous forme d'axiomes les propriétés les plus simples que doit vérifier $\mathbb{R}$ pour répondre notre probléme.

Ces axiomes seront les propriétés les plus élémentaires des nombres réels, par exemple de l'ensemble des graduations possibles des points d'une droite munie d'un repère (quand on trace une droite d'un trait continu, il est raisonnable de penser qu'on n'a pas laissé de "trous"), et dans le reste du cours d'analyse on vérifiera que les propriétés plus complexes sont des conséquences de ces axiomes.

Les propriétés d'encadrement et d'approximation des réels joueront un rôle important pour exprimer cette idée de continuité : ce sera surtout l'axiome de la borne supérieure.

<u>Axiomes décrivant l'ensemble des nombres réels.</u>

Propriétés: $\mathbb{R}$, l'addition, la multiplication notée $\times$ ou ., et les relations de comparaison, $<, >, \leq, \geq$, satisfont aux règles de calcul et de transformations des habituelles. $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ (et donc Z, N) comme sous-ensemble.

Définition: si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on dit:
que m majore A si pour tout $x \in A$, $x \leq m$;
que m est le plus grand élément de A si $m \in A$ et m majore A;
que m minore A si pour tout $x \in A$, $x \geq m$;
que m est le plus petit élément de A si $m \in A$ et m minore A;

Exemples:

(a) Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ a au plus un plus grand élément, noté $\max(A)$ s'il existe, et au plus un plus petit élément, noté $min(A)$;
(b)tout ensemble fini non vide a un plus grand élément et un plus petit.
(c) Si $a < b$ sont deux réels, on définit avec eux huit types différents d'intervalles $I_1 = [a, b], I_2 = [a, b[, I_3 =]a, b[, I_4 =]a, b], I_5 =]-\infty, a], I_6 =]-\infty, a[, I_7 = [a, +\infty[, I_8 =]a, +\infty[$.

On a, par exemple, $max(I_1) = b$, mais I_2 n'a pas de plus grand élément : en effet si $x \in I_2$, on a $a \leq x < b$, et la moyenne $m = \dfrac{b+x}{2}$ étant entre x et b, on aura $a \leq x < m < b$, donc $m \in I_2$ et $x < m$. Ainsi pour tout $x \in I_2$, on peut trouver un nouvel élément m de I_2 qui soit plus grand, aucun $x \in I_2$ ne peut donc être "le plus grand" élément de I_2.

Application: si x est un réel, on peut définir la valeur absolue $|x|$ par la formule $|x| = \max(x, -x)$, qui est un réel positif, égal à x si $x \geq 0$, à $-x$ si $x \leq 0$.

Propriétés de la valeur absolue: si a, b sont des réels, on a les relations: $|a.b| = |a||b|, ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|, |0| = 0$ et $|a| > 0$ si $a \neq 0$.

On peut maintenant exprimer le fait que $\mathbb{R}$ n'a pas de trou, qu'on ne peut donc pas définir de coupure (A, B) sans définir un réel c entre A et B, qui sera à la fois le plus petit réel qui n'est pas dans A et le plus grand réel qui n'est pas dans B.

Définition: si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
on dit que A est majoré s'il existe un réel m tel que m majore A;
on dit que A est minoré s'il existe un réel m tel que m minore A;
on dit que le nombre s est la borne supérieure de A, et on note $s = \sup(A)$, si s est le plus petit majorant de A (s est unique comme plus petit élément de l'ensemble des majorants de A);
on dit que le nombre s est la borne inférieure de A, et on note $s = \inf(A)$, si s est le plus grand minorant de A (s est unique comme plus grand élément de l'ensemble des minorants de A).

Exemple : en reprenant les notations des exemples précédents, on voit que $I_2 = [a, b[$ a pour ensemble de minorants l'intervalle $]-\infty, a]$ et pour ensemble de majorants l'intervalle $[b, +\infty$, donc $inf(I_2) = a, sup(I_2) = b$.

AXIOME: PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, alors A a une borne supérieure.

Comme on va le voir, toutes les propriétés importantes de $\mathbb{R}$ découlent de cet axiome. Tout d'abord un résultat symétrique :
Propriété: Tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

Preuve: Soit A une partie non vide et minorée. On note E l'ensemble de ses minorants. E est non vide parce que A est minorée. E est majoré: considérons $u_0 \in A$, ce qui est possible A étant non vide; si $x \in E$, x minore A, donc $x \leq u_0$: ainsi u_0 majore E. E est non vide et majorée, $s = sup(E)$ existe donc. C'est le plus petit majorant de E. Donc: 1) il majore E, et 2) pour tout $u \in A$, on a comme pour u_0 que u majore E, d'o $s \leq u$: ceci prouve que s minore A, c'est-à-dire $s \in E$. Finalement $s = max(E)$ (puisque c'est à la fois un majorant et un élément de E), c'est-à-dire $s = inf(A)$.

Reconnaître qu'un nombre est la borne supérieure d'un ensemble.

Donnons des caractérisations des bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, permettant de reconnaître si un réel est bien le sup ou l'inf d'un ensemble donnéA :

Propriétés: Soit A un ensemble de réels et s un réel. Alors, si on a l'une des propriétés suivantes, s est la borne supérieure de A ; réciproquement, si $s = sup(A)$, les propriétés (i) à (v) sont vérifiées:
(i) s majore A et pour tout réel u, si u majore A, alors $s \leq u$;
(ii) s majore A et pour tout réel u, si $u < s$, u ne majore pas A;
(iii) s majore A et pour tout réel u, si $u < s$, il y a un élément x de A tel que $u < x$;
(iv) s majore A et pour tout réel $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ ne majore pas A;
(v) s majore A et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il y a un élément x de A tel que: $s - \varepsilon < x$.

Bien sûr, dans chacune de ces formulations, on remplacera, dans la pratique, s majore A par pour tout $x \in A$, on a $x \leq s$.
Et on écrit en général avec des quantificateurs. Ainsi (v) s'écrira :

$$(\forall x \in A, x \leq s) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s - \varepsilon < x).$$

Preuve: (i) et (ii) sont des réécritures du fait que s est le plus petit majorant de A [en (i) on dit que les majorants de A sont tous $\geq s$, en (ii) que les nombres $< s$ ne sont pas majorants de A, ce qui revient au même]; (iii) est une réécriture de (ii) puisque pour tout u u ne majore pas A s'écrit: il existe $x \in A$, tel que $u < x$; (iv) et (v) sont des réécritures de (ii) et (iii), car un réel u vérifie $u < s$ si et seulement si la différence $s - u$ est strictement positive, c'est-à-dire si et seulement si on peut écrire $u = s - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

On peut aussi donner le critére suivant, pour l'existence d'un plus grand élément:

Propriété: soit A un ensemble non vide et majoré de réels et $s = sup(A)$. Alors on est dans exactement un des deux cas suivants:
(1) $s \in A$ et s est le plus grand élément de A;
(2) $s \notin A$ et A n'a pas de plus grand élément.

Preuve: si $s \in A$, s est un majorant de A qui appartient à A, c'est-à-dire $s = max(A)$; réciproquement si $max(A)$ existe, $max(A)$ majore A (définition du max), et si m majore A, $m \geq max(A)$ (puisque $max(A) \in A$). Donc $max(A)$ est le plus petit majorant de A, et on a bien $sup(A) = max(A)$. A l'inverse, si $s = sup(A) \notin A$, $max(A)$ ne peut pas exister.

Toutes ces propriétés ont leur pendant pour les bornes inférieures.

Remarque: Il faut absolument s'habituer à manier les quantificateurs pour écrire les phrases mathématiques. Ainsi le lecteur pourra vérifier que la phrase suivante:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, [A \neq \emptyset \text{ et } \exists m \in \mathbb{R}, (\forall x \in A, x \leq m)] \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}, [(\forall x \in A, x \leq s) \text{ et } \forall m \in \mathbb{R}[(\forall x \in A, x \leq m) \Rightarrow (s \leq m)]]$$

est le postulat de la borne supérieure.

Places des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Du postulat de la borne supérieure découle certaines propriétés intuitives de $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$.

Propriétés:
(a) $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.
(b)Plus généralement, si a, b sont deux réels, avec $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$ (propriété d'Archimède).

Preuve:
(a) Si $\mathbb{N}$ était majoré, il aurait une borne supérieure s; s majorerait $\mathbb{N}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait $n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \leq s \Rightarrow n \leq s - 1$; ceci entraînerait donc que $s - 1$ majore aussi $\mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que s est le plus petit majorant: on aboutit à une contradiction, s ne peut pas exister; Par ailleurs si $\mathbb{Z}$ était minoré par un réel m, $\mathbb{N}$ serait majoré par $-m$, donc $\mathbb{N}$ serait majoré, et on vient de voir que c'est impossible;
(b) b/a ne peut majorer $\mathbb{N}$, il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > b/a$, ou $na > b$.

Propriété: si x est un réel, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On l'appelle la partie entière de x, et on le note $E(x)$ ou $[x]$.

Preuve: $\mathbb{Z}$ n'étant ni minoré ni majoré par x, on peut trouver des entiers p_1, p_2 tels que $p_1 < x < p_2$; l'ensemble E des entiers k tels que $p_1 \leq k \leq x$ est inclus dans $\{p_1, p_1 + 1, , p_2 - 1\}$, il est donc fini et a un plus grand élément n: c'est un entier tel que $n \leq x$ puisque $n \in E$, et comme $n = max(E)$ on a $n + 1 \notin E$ et donc $x < n + 1$. On a donc trouvé un n qui convient, et c'est le seul possible car un entier $m < n$ vérifie $m + 1 \leq n \leq x$, et un $m > n$ vérifie $m \geq n + 1 > x$, donc aucun $m \neq n$ ne peut convenir.

Propriété: Soient a, b des réels tels que $a < b$.
(a) On peut trouver un rationnel r tel que $a < r < b$.

(b) Si on admet qu'il existe au moins un irrationnel t, alors on peut aussi trouver un irrationnel x tel que $a < x < b$.

Preuve:

(a) On applique la propriété d'Archimède à $b - a > 0$ et 1: il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < n(b-a)$ c'est-à-dire (puisque $n \neq 0$ car $1 < 0$ est faux), $1/n < b - a$; on pose $p = E(na) + 1$. Alors $p - 1 \leq na < p$, donc $na < p \leq na + 1$, ce qui donne, vu le choix de n: $a < p/n \leq a + 1/n < a + (b-a) = b$; le rationnel $r = p/n$ convient.

(b) Si t est irrationnel, alors $a - t < b - t$ donc d'après le (a) il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $a - t < r < b - t$, d'où, si $x = t + r$, $a < x < b$; maintenant $t = x - r$, $t \notin \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$ donc x ne peut être rationnel: $x \notin \mathbb{Q}$.

Remarque: les irrationnels existent, par exemple la racine carrée de 2 existe et n'est pas rationnelle (cf plus loin).

Définition: un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense si pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on peut trouver $x \in A$ tel que $a < x < b$. (Autrement dit A rencontre tout intervalle ouvert non vide).

Propriété: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses.

EXEMPLES D'UTILISATION DE L'AXIOME DE LA BORNE SUPERIEURE

La propriété de la borne supérieure assure qu'une fonction raisonnable (=continue) ne peut passer d'une valeur positive à une valeur négative sans qu'entre les deux il y ait une valeur limite où la fonction s'annule. On peut ainsi généraliser ou définir de nombreux calculs irréalisables quand on ne connaît que les nombres rationnels. À titre d'exemple, montrons l'existence des racines carrés des réels positifs.

Tout réel positif a une unique racine carrée positive.

Propriété : soit $a > 0$ un réel.
Soient les ensembles E et F des nombres $x \geq 0$ tels que $x^2 < a$ (pour E) et $x^2 > a$ (pour F) :

$$E = \{x \geq 0 \mid x^2 < a\} \text{ et } F = \{x \geq 0 \mid x^2 > a\}$$

Alors on a $sup(E) = inf(F) = s$, et s vérifie $s^2 = a$, et $E = [0, s[, F =]s, +\infty[$.
Conclusion: tout réel positif a une unique racine carrée positive. On la note $a^{1/2}$ ou $\sqrt{a}$.

Preuve:
F est non vide car par exemple $(a + 1/2)^2 = a^2 + 2(1/2)a + (1/2)^2 = a^2 + 1/4 + a > a$;
E est non vide car $0 \in E$.
Si $x \in E$ et $y \in F$ on a $x^2 < a < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$.
Ainsi E est majoré par les éléments de F, et F minoré par les éléments de E. Cela assure l'existence de la borne supérieure de E et de la borne inférieure de F.
On peut donc poser $s = sup(E), s' = inf(F)$.
Le nombre s est le plus petit majorant de E, et F est composé de majorant de E, donc $s \leq y$ pour tout $y \in F$, c'est-à-dire que s minore F, donc $s \leq s'$ (puisque s' est le plus grand minorant de F).
Maintenant soit $x \in E$. Montrons qu'on peut toujours trouver un autre élément x' de E, plus grand que x, $x < x' \in E$.
Comme $x \in E$ on a $x^2 < a$.
Soit un réel $h > 0$, supposons-le petit, $h < 1$ au moins. Alors $h^2 < h$, et donc:

$$(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2 < x^2 + (2x + 1)h.$$

On peut trouver une valeur de h est suffisamment petite, pour que $(x + h)^2 < a$; il suffit que $(2x + 1)h$ soit inférieur à la différence entre a et x^2, par exemple en prenant:

$$h_0 = min[\frac{a - x^2}{2x + 1}, \frac{1}{2}],$$

on aura à coup sûr à la fois $0 < h_0 < 1$ et $h_0 \leq \dfrac{a - x^2}{2x + 1}$. Pour cette valeur on aura donc :

$$(x+h_0)^2 < x^2 + (2x+1)h_0 \leq x^2 + \frac{a-x^2}{2x+1}(2x+1) = x^2 + (a-x^2) = a.$$

On peut donc poser $x' = x + h_0$, et on aura $x < x'$ et $x' \in E$.
Conclusion : E n'a pas de plus grand élément, donc $s = sup(E) \notin E$, donc $s^2 \geq a$.
Soit alors $y \in F$. Montrons qu'on peut toujours trouver un autre élément y' de F, plus petit que y, $y > y' \in F$.
Comme $y \in F$ on a $y^2 > a$.
Soit un réel $h > 0$, supposons-le petit, $h < 1$ au moins. Alors $h^2 < h$, et donc:

$$(1+h)^2 = 1^2 + 2h + h^2 < 1 + 3h.$$

On peut trouver une valeur de h est suffisamment petite, pour que :

$$(\frac{y}{1+h})^2 > a \iff \frac{y^2}{a} > (1+h)^2 \ ;$$

il suffit que $1 + 3h$ soit inférieur à $\frac{\frac{y^2}{a} - 1}{3} = \frac{y^2 - a}{3a}$, par exemple en prenant:

$$h_1 = min[\frac{y^2 - a}{3a}, \frac{1}{2}],$$

on aura à coup sûr à la fois $0 < h_1 < 1$ et $h_1 \leq \frac{y^2 - a}{3a}$. Pour cette valeur on aura donc :

$$(1+h_1)^2 < 1 + 3h_1 \leq 1 + 3\frac{y^2 - a}{3a} = 1 + \frac{y^2 - a}{a} = \frac{y^2}{a} \Rightarrow a < (\frac{y}{1+h_1})^2.$$

On peut donc poser $y' = \frac{y}{1+h_1}$, et on aura $y' < y$ et $y' \in F$.
Conclusion : F n'a pas de plus petit élément, donc $s' = inf(F) \notin F$, donc $s'^2 \leq a$.
Finalement $s' \leq s \leq s'$, donc $s' = s$, et $s^2 \leq a \leq s^2$, donc $s^2 = a$. Ceci entraîne immédiatement que $0 \leq x < s \Rightarrow x^2 < a$, et $s < y \Rightarrow a < y^2$, donc que $E = [0, s[, F =]s, +\infty[$.

<u>On s'entraînera avec fruit à généraliser cette construction:</u>

(A) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, et $a > 0$, il existe un unique $x > 0$ tel que $x^n = a$. On le note $a^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{a}$.
(B) On peut ainsi définir $a^{\frac{p}{q}}$ quand a est un réel strictement positif, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$.
(C) On peut en fait étendre à toute base $a > 0$, et à toute puissance $b \in \mathbb{R}$, la définition du nombre a^b, défini a priori seulement si $b \in \mathbb{N}$ par $a^b = a \times a \times ... \times a$ (b facteurs), ou pour $b \in \mathbb{Z}_-$ par $a^b = \frac{1}{a^{|b|}}$.
(D) En définitive, on obtient les règles de calcul usuelles suivantes :
Si $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $(ab)^x = a^x.b^x, a^{x+y} = a^x.a^y, (a^x)^y = a^{x.y}, a^{-1} = 1/a, a^0 = 1$.
Par ailleurs :
(i) $(a < b$ et $x > 0) \Rightarrow a^x < b^x$; $(a < b$ et $x < 0) \Rightarrow a^x > b^x$;
(ii) $(a > 1$ et $x < y) \Rightarrow a^x < a^y$; $(a < 1$ et $x < y) \Rightarrow a^x > a^y$.

En réalité, quand on étudiera les fonctions continues, on donnera une bonne raison pour que les équations commes $x^n = a$ aient toutes des solutions, et on en profitera, comme application, pour définir les fonctions exponentielles et leurs réciproques, les fonctions logarithmes.