U N I V E R S I T E
de
C A E N

○ **Institut de Biologie Fondamentale et Appliquée** ○

○ *M A T H E M A T I Q U E S pour SV 105* ○

LICENCE 1ère A N N É E
S C I E N C E S du V I V A N T

PRESENTATION

Ce polycopié est conçu pour permettre aux étudiants des "Sciences du Vivant" de consolider leurs connaissances et d'acquérir les outils mathématiques nécessaires à leur formation.

Les différents thèmes abordés ont été discutés et préparés en collaboration avec les enseignants des autres disciplines, en particulier ceux de Physique, Chimie et Biologie.

L'objectif est aussi d'uniformiser les enseignements de Mathématiques des différents groupes d'enseignement.

On trouvera de nombreux exercices qui ne pourront pas tous être traités en Cours-TD ; c'est pourquoi les corrigés succints sont inclus à la fin du polycopié ; il est cependant vivement conseillé aux étudiants de chercher sérieusement les exercices avant de regarder la solution.

(jmarc.guerrier@math.unicaen.fr)

Mathématiques - Université de Caen.

BIBLIOGRAPHIE.

On retrouvera dispersés dans les livres de Mathématiques des DEUG des filières de sciences appliquées les thèmes abordés ici ; on pourra consulter :

○ *Mathématiques Analyse . V.Blondel (Dunod)*

○ *Mathématiques Deug Sciences SV-VT. L1 Biologie. E.Azoulay (Edisciences)*

○ ● ○ ● ○ ● ○

Chapitre 1

Trigonométrie

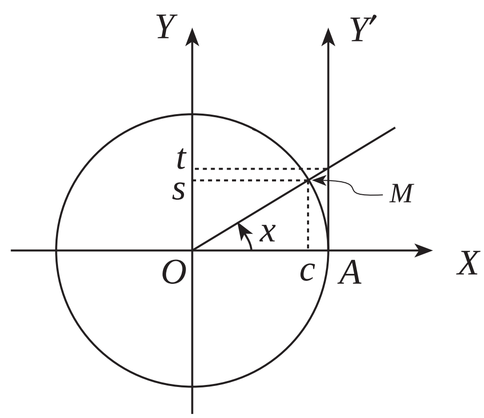
Utilisée pour déterminer des distances inaccessibles en navigation, topographie, astronomie, la *trigonométrie*, qui traite des relations entre les cotés et les angles des triangles, est un outil mathématique employé aussi en physique pour modéliser les phénomènes périodiques comme par exemple les vibrations en mécanique, acoustique, électricité ou en optique.

1.1 Fonctions trigonométriques.

Le *cercle trigonométrique* de centre O, de rayon 1, est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On note $\overrightarrow{OA}$ le vecteur unitaire et $mes(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x$ la *mesure* de l'angle exprimée en *radians* à 2π près ou en degrés. On a la correspondance : 2π radians $=$ 360 degrés qui donne x radians $= \dfrac{180}{\pi}\, x$ degrés et réciproquement x degrés $= \dfrac{\pi}{180}\, x$ radians.

On définit les fonctions trigonométriques :

$$\sin : x \longmapsto \sin x = \overline{Os} \text{ ordonnée de } M$$
$$\cos : x \longmapsto \cos x = \overline{Oc} \text{ abscisse de } M$$
$$\tan : x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{Ot}.$$

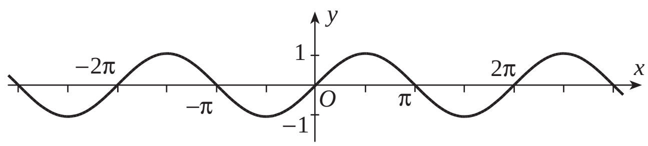


Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OMc permet d'écrire la formule fondamentale de la trigonométrie circulaire : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

• La fonction $x \longmapsto \sin x$ est définie pour tout x de $\mathbf{R}$. Elle est impaire puisque $\sin(-x) = -\sin x$ et de période 2π ; son graphe est donc symétrique par rapport à O. Comme $\sin x = \sin(\pi - x)$, le graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $X = \frac{\pi}{2}$; il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour obtenir le graphe complet d'effectuer les symétries, puis les translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

La dérivée est $\sin' x = \cos x$, d'où le tableau de variations et le graphe

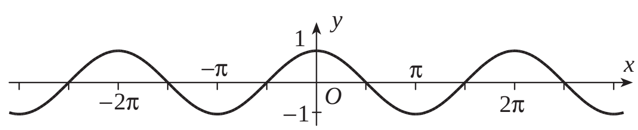
x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin' x$	1	$+$	0
$\sin x$	0	$\nearrow$	1



• La fonction $x \longmapsto \cos x$ est définie pour tout x de $\mathbf{R}$. Elle est paire puisque $\cos(-x) = \cos x$ et de période 2π ; son graphe est donc symétrique par rapport à Oy ; il est aussi symétrique par rapport au point $(\frac{\pi}{2}, 0)$ car $\cos x = -\cos(\pi - x)$; il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et pour obtenir le graphe complet d'effectuer les symétries, puis les translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

La dérivée est $\cos' x = -\sin x$, d'où le tableau de variations et le graphe

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos' x$	0	$-$	-1
$\cos x$	1	$\searrow$	0

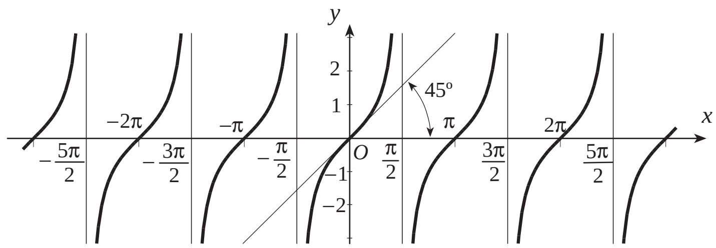


• La fonction $x \longmapsto \tan x$ est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Elle est impaire puisque $\tan(-x) = -\tan x$ et de période π ; son graphe est donc symétrique par rapport à O et de plus admet pour asymptote la droite $X = \frac{\pi}{2}$ car

$\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$; il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ et pour obtenir le graphe complet d'effectuer la symétrie, puis les translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

La dérivée $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ donne le tableau de variations puis le graphe

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	1	$+$	$+\infty$
$\tan x$	0	$\nearrow$	$+\infty$



1.1.1 Formulaire de trigonométrie

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$\cos' x = -\sin x$

$\sin' x = \cos x$

$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

1.1.2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

1.2 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

1.2.1 Fonction réciproque de la fonction *sinus*

La fonction $x \longmapsto \sin x$ est une fonction continue monotone strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$; elle admet donc une fonction réciproque, notée $\operatorname{Arc}\sin$, continue monotone strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$, dont le graphe est symétrique de celui de $x \longmapsto \sin x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par rapport à la première bissectrice. Ainsi

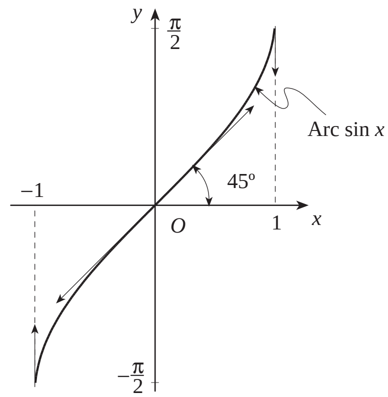
$$\boxed{y = \operatorname{Arc}\sin x \Longleftrightarrow x = \sin y \text{ avec } \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

De plus, pour tout $x \in \left]-1, +1\right[$ on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

car $\cos y > 0$ pour tout $y \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. D'où

$$\operatorname{Arc}\sin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in \left]-1, +1\right[.$$



1.2.2 Fonction réciproque de la fonction *cosinus*

La fonction $x \longmapsto \cos x$ est une fonction continue monotone strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$; elle admet donc une fonction réciproque, notée $\mathrm{Arc}\cos$, continue monotone strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, dont le graphe est symétrique de celui de $x \longmapsto \cos x$ sur $[0, \pi]$ par rapport à la première bissectrice. Ainsi

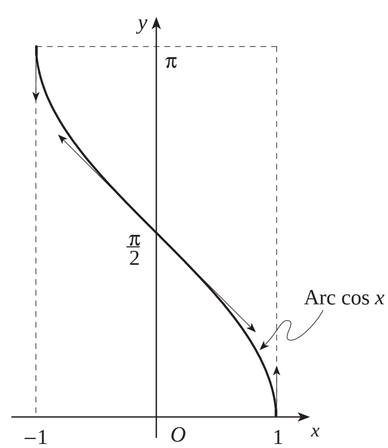
$$\boxed{y = \mathrm{Arc}\cos x \Longleftrightarrow x = \cos y \text{ avec } \quad y \in [0, \pi]}$$

De plus, pour tout $x \in \left]-1, +1\right[$ on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

car $\sin y > 0$ pour tout $y \in \left]0, \pi\right[$. D'où

$$\mathrm{Arc}\cos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in \left]-1, +1\right[.$$



1.2.3 Fonction réciproque de la fonction *tangente*

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est une fonction continue monotone strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbf{R}$; elle admet donc une fonction réciproque, notée $\mathrm{Arc}\tan$, continue monotone strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, dont le graphe est symétrique de celui de $x \longmapsto \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par rapport à la première bissectrice. Ainsi

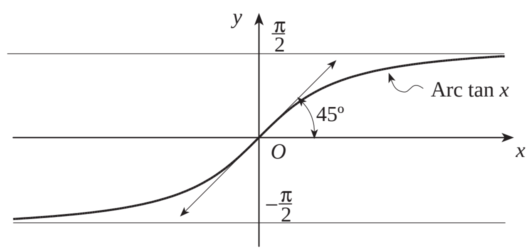
$$\boxed{y = \mathrm{Arc}\tan x \iff x = \tan y \text{ avec } \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$ on peut écrire formellement :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

D'où

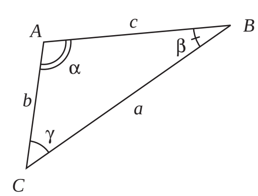
$$\mathrm{Arc}\tan' x = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$



1.3 Applications de la trigonométrie à la géométrie

Relations entre les éléments du triangle plan.

- Equation fondamentale : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
  (*Tracer par un sommet la parallèle au côté opposé.*)
- Théorème des sinus : $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$



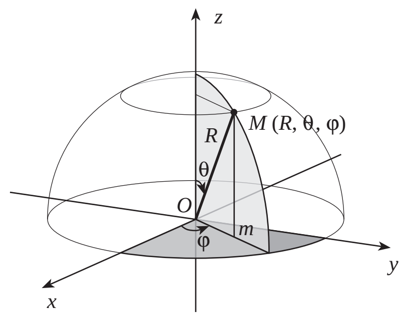
  (*H étant la projection orthogonale de A sur BC, calculer AH en fonction de* γ *puis de* β.)
- Théorème des projections : $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$
- Théorème du cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
  (*Ecrire les 3 équations du th. des projections et multiplier par* $a, -b, -c$)

1.3.1 Coordonnées Sphériques (R, θ, φ)

On pose $|\overrightarrow{OM}| = R$, $\quad R \in [0, +\infty[$

La colatitude est l'angle $\theta = (Oz, OM)$ avec $\theta \in [0, \pi[$

La longitude est l'angle $\varphi = (Ox, Om)$ avec $\varphi \in [0, 2\pi[$



Formules de passage des coordonnées sphériques aux cartésiennes :

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta.$$

1.4 Complément sur les fonctions réciproques

1.4.1 Fonction croissante, décroissante, monotone, bijective, réciproque

Soit $f : D \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$.

– On dit que f est une fonction *croissante* (resp. *strictement croissante*) sur D si :

$$\forall x_1, \forall x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

– On dit que f est une fonction *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) sur D si :

$$\forall x_1, \forall x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

– Une fonction croissante ou décroissante est dite *monotone*.

– Une fonction f de $[a, b]$ sur $[c, d]$ est une *bijection* si et seulement si l'équation $f(x) = y$ a une solution unique dans $[a, b]$ quel que soit y dans $[c, d]$. Désignons-la par x ; on peut alors définir la fonction

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b] \qquad y \longmapsto x = \varphi(y).$$

φ est bijective car $\quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)$

La fonction φ est appelée *fonction réciproque* de f ; on la note f^{-1} et

$$\boxed{\forall x \in [a,b] \quad \forall y \in [c,d] \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$$

avec

$$\forall y \in [c,d] \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in [a,b] \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

1.4.2 Théorème des fonctions réciproques

Une fonction *continue* f *strictement monotone* sur $[a,b]$ est une *bijection* de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$ si elle est croissante, sur $[f(b), f(a)]$ si elle est décroissante. La fonction réciproque f^{-1} est elle aussi continue et strictement monotone.

- CONSTRUCTION DU *graphe* DE f^{-1} À PARTIR DE CELUI DE f.

Dans un repère orthonormé, les points (x,y) et (y,x) sont symétriques par rapport à la première bissectrice ; comme $y = f(x)$ et $f^{-1}(y) = x$ il en est donc de même des points $(x, f(x))$ et $(y, f^{-1}(y))$ pour tout $x \in [a,b]$. Les graphes sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice.

- DÉRIVÉE DE LA FONCTION $x \longmapsto y = f^{-1}(x)$.

Si f est dérivable et si $f'(y) \neq 0$, en dérivant l'équation

$f(f^{-1}(x)) = x \;\; \forall x \in [c,d]$ on obtient $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$ donc

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

Exemples. 1° Soit f la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = x^2$. f est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, donc f^{-1} existe et est strictement croissante. f étant dérivable sur $]0, +\infty[$, il en est de même de f^{-1} sur $]0, +\infty[$. On la note $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt{x}$ ce qui équivaut à $x = y^2$ avec $(y > 0)$. Calculons sa dérivée :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2° Soit f la fonction $x \longmapsto f(x) = 1/x$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ on a $f^{-1}(x) = 1/x$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

3° Soit f la fonction $x \longmapsto f(x) = \ln x$ de $]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$ on a $f^{-1}(x) = e^x$ de $\mathbf{R}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercices

1.1. Trouver en radians toutes les solutions des équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ f) $\tan 3x = -\sqrt{3}$

1.2. Trouver en radians les solutions des équations suivantes :

a) $\cos 3x + \cos 2x = 0$ b) $1 + \sin x = \cos 2x$

c) $\sin 2x \sin 3x = 1$ d) $\cos x - \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1.3. La mesure d'un angle est de 15^o. Quelle est sa mesure en radians ?
La mesure d'un angle est de 1.3 radians. Quelle est sa mesure en degrés ?

1.4. Trouver en degrés les solutions de l'équation :

$$\sin(2x - 60^o) = \sin(3x + 45^o)$$

Donner les solutions dans l'intervalle $[0^o, 360^o[$.

1.5. Trouver α en radians, $\alpha \in [0, \pi/2[$, tel que $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

1.6. (Extraits de contrôles.)

a. (P1-06) Résoudre dans $\mathbf{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ l'équation trigonométrique :

$$\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

b. (P1-07) Résoudre dans $\mathbf{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ l'équation trigonométrique :

$$\sqrt{6}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta - 2 = 0.$$

(*On pourra écrire* $\sqrt{6}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta$ *sous la forme* : $r\cos(x+\varphi)$.)

c. Calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ en fonction de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. (*Noter que* : $\dfrac{5}{12} = 1 - (\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4})$)

1.7. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\tan x$ b) $g(x) = \operatorname{Arc}\cos\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$

1.8. Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \operatorname{Arc}\cos\big(\cos x\big)$ b) $x \longmapsto \cos\big(\operatorname{Arc}\cos x\big)$

1.9. Etudier et tracer le graphe de la fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x.$$

(*Chercher le domaine de définition et calculer la dérivée de* φ).

1.10. Simplifier l'expression $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$, puis résoudre l'équation :

$$4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0.$$

1.11. La fonction $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ est utilisée en physique pour décrire les mouvements oscillants, tel celui du pendule.
Montrer que $t \longmapsto f(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ peut s'écrire sous cette forme.
Application numérique : $f(t) = \cos 2t + 3\sin 2t$.

1.12. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation :

$$\cos x + \sqrt{3}\,\sin x = m$$

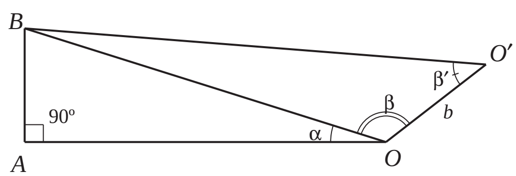
lorsque a) m=1 b) m=2 c) m=3 *(Extrait P1 - 06)*.
Trouver les solutions dans $\mathbf{R}$ et dans $[0, 2\pi]$ des deux équations :

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$ *(Extrait P1 - 07)*.

1.13. Application de la trigonométrie aux calculs de distances :

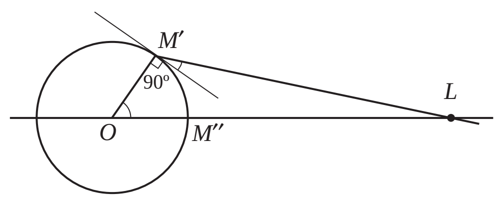
a) Calculer la distance du point O au point B visible, mais non accessible, connaissant β, β' et b.

b) On mesure b, α, β et β' ; calculer la hauteur AB d'une montagne relativement à un plan horizontal.



c) Distance Terre - Lune : on connaît α, β et R. Montrer que

$$OL = R\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}.$$



d) Comment calculer la distance Terre - Soleil connaissant la distance Terre - Lune ?

1.14. Calculer la distance Paris - New York en nautiques et en kilomètres. Paris est à $48°50'11''$ de latitude Nord et $2°20'14''$ de longitude Est et New-York est à $40°44'$ de latitude Nord et $73°56'$ de longitude Ouest. Le nautique est une unité d'angle correspondant à une minute. Le rayon moyen de la Terre est $R = 6368$ km.

1.15. Le signal d'un satellite L du réseau GPS met le temps $\tau = 0.0692s$ pour transiter de L à M'. On donne, les notations étant celles de l'exercice 1.13 :
$OM' = 6368km$; $OL = 26000km$ (révolution 12heures) et $c = 299790km.s^{-1}$.
Calculer la latitude $\alpha = (OL, OM')$.

○ ● ○ ● ○ ● ○

Chapitre 2

Les nombres complexes

Certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas de solution dans $\mathbf{R}$; c'est le cas de l'équation du second degré $x^2+1=0$ puisque tout carré de réel est positif. D'où l'idée de construire un nouvel ensemble, l'ensemble des *nombres complexes* noté $\mathbf{C}$ contenant les nombres réels et les solutions de ces équations. On pourrait penser que cet ensemble est difficile à décrire, mais il n'en est rien puisqu'il suffit d'adjoindre à $\mathbf{R}$ le nombre i, racine de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Les nombres complexes, que l'on va étudier maintenant, sont très employés en mathématique et en physique (*électromagnétisme , mécanique quantique*). L'équation de Schrödinger, étudiée en cours de Chimie, utilise explicitement le nombre i.

2.1 Définition et propriétés de C

On définit l'ensemble $\mathbf{C}$ comme l'ensemble des nombres $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ et $i^2=-1$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication, notées $+$ et $\cdot$ respectivement, définies à partir de l'addition et de la multiplication de $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(a+ib)+(a'+ib') &= (a+a')+i(b+b')\\ (a+ib)\cdot(a'+ib') &= aa'+iab'+ia'b+i^2bb'\\ &= (aa'-bb')+i(ab'+ba')\end{aligned}$$

Soit $z = a + ib$. On écrit $a = \operatorname{Re} z$ et $b = \operatorname{Im} z$ qui s'appellent respectivement la *partie réelle* et la *partie imaginaire* de z .

On a donc $b = \operatorname{Im} z = 0$ si est seulement si z est un nombre réel. Si $a = 0$, c'est-à-dire $z = \operatorname{Im} z$, on dit que z est un nombre imaginaire pur.

$\mathbf{C}$ est un *c*orps commutatif ; en particulier tout complexe $a + ib \neq 0$ c'est-à-dire $(a,b)\neq(0,0)$ a un inverse $a'+ib'$ avec $(a+ib)(a'+ib')=1$ donc

$$a'=\frac{a}{a^2+b^2}\qquad b'=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

z est représenté par le point M
ou par
le vecteur $\overrightarrow{OM} = (a, b)$.

z est l'affixe de M,
M est l'image de z.

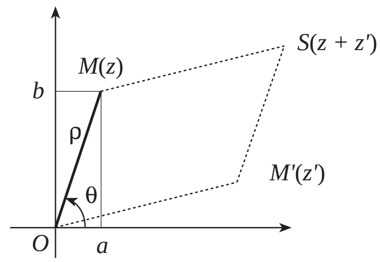


FIG. 2.1: Représentation d'un nombre $z = a + ib$ dans le plan (dit plan de Cauchy)

Exemples de calcul dans **C** :

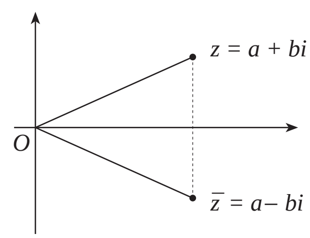
$$(1 + 2i) + (2 + 5i) = 3 + 7i, \quad (1 + 2i)(2 + 5i) = -8 + 9i \text{ et } \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

2.2 Complexes conjugués

On note $\overline{z}$ le conjugué de z :

si $z = a + ib \quad \overline{z} = a - ib$.

Géométriquement l'image $\overline{M}$ de $\overline{z}$ est symétrique de l'image M de z par rapport à l'axe ox.



Propriétés.

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z \qquad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \text{ si } z = a + ib \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} \quad (z \neq 0)$$

Exemple. Calcul de $z = \dfrac{1}{1 + 2i}$.

Solution. On multiplie numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée de $1 + 2i$, soit $1 - 2i$.

$$z = \frac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 2i}{1 + 4} = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i. \qquad \square$$

2.3 Forme trigonométrique des nombres complexes

2.3.1 Module de z

Soit $z = a + ib$. Le module de z, noté $|z|$ ou ρ, est défini par

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Remarquons que $|z| = \rho > 0$.

Propriétés.

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ $\qquad$ $|z| = |\overline{z}|$

$|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ $\qquad$ $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

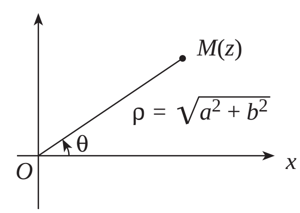
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Remarque. Les complexes z tels que $|z| = \rho$ ont leur image située sur un cercle de centre 0, de rayon ρ.

2.3.2 Argument de z

Soit $z = a + ib$. Alors, on a $z \neq 0 \Leftrightarrow (a, b) \neq (0, 0)$. Soit $M(z)$ l'image de z.

$\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$: angle défini à 2π près, des demi-droites Ox et OM dans le plan orienté.
θ est un *argument* de z.



$\rho = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le *module* de z. Pour tout $z \neq 0$, θ est défini par :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow \quad a = \rho\cos\theta,$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \Rightarrow \quad b = \rho\sin\theta.$$

On appelle "Argument principal" de z l'argument θ de z tel que $-\pi < \theta < \pi$. On le note $\operatorname{Arg} z$.

2.3.3 Forme trigonométrique et forme exponentielle

ρ et θ étant le module et l'agument de z, on peut écrire la *forme trigonométrique* :

$$z = a + ib = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Calculons maintenant le produit :

$$zz' = \rho\rho'\big(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\big)$$

Ce résultat, qui rappelle la propriété fondamentale de l'exponentielle, suggère la notation dite *exponentielle* de z :

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad \text{avec} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque. a) Tout complexe de module 1 s'écrit :

$$\cos\theta + i\sin\theta \text{ ou } e^{i\theta}.$$

b) Deux complexes sont égaux s'ils ont même module et si leurs arguments diffèrent d'un multiple de 2π.

2.3.4 Formule de Moivre

Soient $\begin{cases} u_1 \in \mathbf{C} & |u_1| = 1 \quad u_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1, \\ u_2 \in \mathbf{C} & |u_2| = 1 \quad u_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2. \end{cases}$ Calculons le produit :

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

que l'on peut écrire simplement :

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

En faisant $\theta_1 = \theta_2$ et un raisonnement par récurence sur n on obtient la Formule de Moivre :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,\ n \in \mathbf{Z}}$$

2.3.5 Formules d'Euler

Par addition et soustraction $\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$ donne $\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}}$

APPLICATIONS :

- Expressions de $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ sous forme de polynômes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
- Linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$.

2.4 Equations dans C

2.4.1 Racines carrées d'un complexe

Exemple. Trouver z tel que $z^2 = a$ avec $a \in \mathbf{C}$ donné.

Solution. a) Si $a = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, posons $z = re^{i\varphi}$
alors

$$z^2 = r^2 e^{2i\varphi} = \rho e^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ \varphi_1 = \dfrac{\theta}{2} \quad \varphi_2 = \dfrac{\theta}{2} + \pi \end{cases}$$

On a donc deux solutions :

$$z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2},$$
$$z_2 = \sqrt{\rho} e^{i(\theta/2+\pi)} = -\sqrt{\rho} e^{+i\theta/2} = -z_1.$$

b) Si $a = \alpha + i\beta$, posons $z = x + iy$; alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

On a aussi $|z^2| = x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |a|$, ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \\ y^2 &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{on obtient } 2 \text{ solutions car } sgn(xy) = sgn(\beta).$$

2.4.2 Equations du second degré dans C

Ce sont des équations de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (a, b, c) \in \mathbf{C}^3 \quad a \neq 0$$

$$\text{soit après division par } a \quad z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{puis} \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\text{et} \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on cherche les racines carrées de Δ dans **C** par l'une des méthodes précédentes.

Soient δ et $-\delta$ (images symétriques par rapport à 0) ces deux racines opposées. On obtient alors

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

Il y a toujours deux racines (distinctes ou confondues).

2.4.3 Equations $z^n = a$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{C}$ donné.

Exemple. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^5 = 1$.

. Posons $z = \rho e^{i\varphi}$; l'équation s'écrit alors : $(\rho e^{i\varphi})^5 = e^{2ik\pi}$ qui se scinde en :

$$\begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\varphi = 2k\pi \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi_k = \dfrac{2k\pi}{5} \quad (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

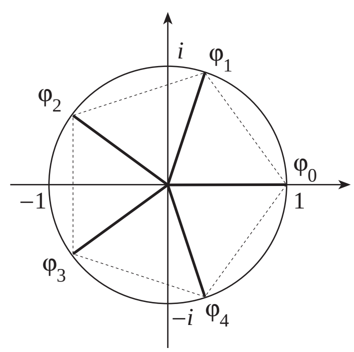
Explicitons les solutions $z_k = e^{2ik\pi/5} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} \quad \text{et} \quad z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

En effet, $\varphi_5 = \dfrac{10\pi}{5} = 2\pi$, donc z_5 a même image que z_0.

Il en est de même pour z_k, $k \geq 5$ ou $k < 0$.

Ci-dessous on a tracé les images des racines dans le plan de Cauchy :



Il y a 5 racines équiréparties sur le cercle unité.

□

Plus généralement, dans $\mathbf{C}$, toute équation polynomiale de degré n a n racines (distinctes ou confondues).

2.4.4 Réduction de l'expression $E = a\cos\omega t + b\sin\omega t \quad (a \neq 0)$

Si l'on pose $\quad z = a - ib$,

alors $\quad z = re^{i\varphi}$ avec $\sin\varphi = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Puisque $\quad e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, $ze^{i\omega t} = a\cos\omega t + b\sin\omega t + i(a\sin\omega t - b\cos\omega t)$

et l'on reconnait $E = \mathcal{R}e(ze^{i\omega t})$

mais aussi :

$$E = r\mathcal{R}e[e^{i(\omega t+\varphi)}] = r\mathcal{R}e[\cos(\omega t+\varphi) + i\sin(\omega t+\varphi)] = r\cos(\omega t+\varphi).$$

On obtient finalement la forme réduite :

$$E = r\cos(\omega t+\varphi) \text{ avec } \sin\varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Exercices

2.1. a) Calculer sous la forme cartésienne $a + ib$ le nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ sachant que $z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{5}i$.

b) Simplifier l'expression $Z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

2.2. Résoudre l'équation $(1+i)z = 3+i$.

2.3. a) Trouver les nombres $z \in \mathbf{C}$ tels que $Z = (z+1)\dfrac{1}{z}$ soit réel.

b) Trouver les nombres $z \in \mathbf{C}$ tels que $Z = (\overline{z} - 2)(z - i)$ soit imaginaire pur.

2.4. Calculer les modules des nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $\dfrac{(2+3i)(1-5i)}{(4+i\sqrt{10})(\sqrt{12}-i)}$

c) $a(\cos\theta + i\sin\theta) \quad a \in \mathbf{R}$ d) $1 + \cos\theta + i\sin\theta$

2.5. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

2.6. Développer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ sous forme d'un polynôme en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.

2.7. Linéariser $\cos^2\theta$, $\sin^3\theta$ et $\cos^4\theta$.

2.8. Ecrire sous forme trigonométrique ou exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ b) $z_2 = -1 + i$

c) $z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta \in [0, 2\pi[$ d) $Z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{(1+i)^3}$

2.9. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^3 = -1$.

2.10. Calculer le module et l'argument de $4\sqrt{2}(1-i)$; en déduire sa forme exponentielle et les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$; représenter ces dernières dans le plan complexe. (Extrait SV)

2.11. (Extrait SV) Ecrire $\sin t$ et $\cos t$ sous forme exponentielle et calculer les coefficients de l'expression

$$\sin^3 t \cos^2 t = a\sin 5t + b\sin 3t + c\sin t \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$

2.12. a) Calculer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $35 - 12i$.

b) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - (10+3i)z + 14 + 18i = 0$. (Extrait SVL1)

2.13. (Extrait SVL1 P1 06-07)

1. Résoudre dans **C** l'équation : $\delta^2 = 24 + 10i$
2. Résoudre dans **C** l'équation : $z^2 + (1-i)z - 6 - 3i = 0$.

2.14. (Extrait SVL1 P1 06-07)

Il s'agit de résoudre dans **C** l'équation :

$z^4 + 4 = 0 \quad (E)$

1. Combien cette équation admet-elle de solutions dans **C** ?
2. Donner le module et l'argument de -4.
3. Résoudre l'équation (E) et donner les solutions sous forme exponentielle, puis sous la forme algébrique.
4. Placer les solutions de (E) dans le plan complexe.

2.15. (Extrait SVL1 P1 07-08)

1. Calculer le module $|z_1|$ et l'argument θ_1 du nombre complexe $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Calculer le module $|z_2|$ et l'argument θ_2 du nombre complexe $z_2 = 1 - i$.
3. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
4. A partir de la forme algébrique de z_1 et de z_2, calculer les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{z_1}{z_2}$ et déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2.16. (Extrait SVL1 P1 07-08)

3.1. Calculer le module et l'argument de i, puis résoudre dans **C** l'équation : $z^6 = i$.

3.2 Utiliser les résultats de 2.4 pour donner les solutions sous la forme algébrique $a + ib$.

2.17. (Extrait SVL1 P1 07-08)

1.a Résoudre dans **C** l'équation : $\delta^2 = 8 + 6i$

1.b Déterminer les solutions de l'équation : $x^2 + 4x + 3 = 0$

et montrer que les deux équations :

$x^2 + 4x + 3 = 0$ et $x^3 + 2x^2 - x + 6$

ont une solution commune unique que l'on déterminera.

On considère dans **C** le polynôme $P(z) = iz^3 + (2i-1)z^2 - (i+4)z + 3(2i-1)$.

2. On suppose d'abord $z = x \in \mathbf{R}$; séparer parties réelle et imaginaire et montrer que P admet une racine réelle que l'on déterminera.
3. Développer l'expression $(z+3)(az^2+bz+c)$ puis par identification, déterminer les coefficients a, b et c tels que $(z+3)(az^2+bz+c) = P(z)$.
4. Résoudre dans **C** l'équation $P(z) = 0$ et placer les solutions dans le plan complexe.

○ ● ○ ● ○ ● ○

Chapitre 3

Fonctions puissances

3.1 Calcul sur les exposants entiers

Soit $a, b \in \mathbf{R} \qquad n, p \in \mathbf{N}$.

$$a^n = \underbrace{a\,a \cdots a}_{n \text{ facteurs}} \quad a^n\,a^p = a^{n+p} \quad (a^n)^p = a^{np} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

et pour $a \in \mathbf{R}^*$

$$a^{n+0} = a^n \quad \text{implique } a^0 = 1 \text{ puis } \ a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

3.2 Calcul sur les exposants fractionnaires

Soit $a \in \mathbf{R}_+^* \quad p, p' \in \mathbf{N} \quad q, q' \in \mathbf{N}^*$ et p/q irréductible.

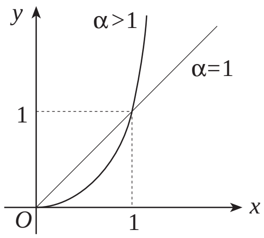
$$\begin{aligned}
&a^1 = a \ \Rightarrow (a^{1/q})^q = a \Rightarrow a^{1/2} = \sqrt{a} \ \text{ et } \ a^{1/q} = \sqrt[q]{a} \quad (q > 3) \\
&a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p \quad (a^{p/q})^n = a^{np/q} \\
&a^{\frac{p}{q}}\, a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}} \qquad (a^{p/q})^{p'/q'} = a^{pp'/qq'} = \sqrt[qq']{a^{pp'}} \\
&a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.
\end{aligned}$$

3.3 Fonction puissance $\quad x \longmapsto x^\alpha \quad \alpha \in \mathbf{R}$

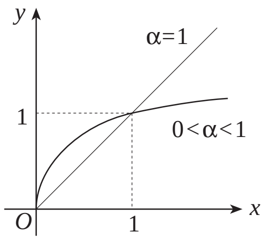
Par définition $\quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad$ pour $\quad x > 0$. La fonction est continue et dérivable, de dérivée $\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Pour $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est donc croissante et décroissante pour $\alpha < 0$.

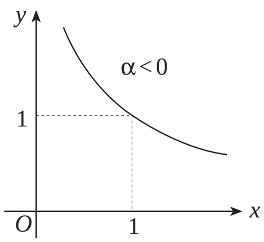
3.4 Graphes de la fonction puissance $x \longmapsto x^\alpha$ pour $x > 0$



Au point $(0,0)$: tangente horizontale
A l'infini : branche parabolique de direction Oy
Type : $y = x^2, x^{3/2}, \ldots$



Au point $(0,0)$: tangente verticale
A l'infini : branche parabolique de direction Ox
Type : $y = x^{1/2}, x^{2/3}, \ldots$



$x \to +0$: asymptote $x = 0$
A l'infini : asymptote $y = 0$

Type : $y = x^{-1/2}, x^{-2/3}, \ldots$

Exercices

3.1. Simplifier puis calculer :

a) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-3/2}$ b) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0.8}$ c) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-2/5}$

d) $(0.64)^{-0.5}$ e) $\left(\frac{27}{64}\right)^{2/3}$ f) $\sqrt[7]{0.0078125}$

3.2. Simplifier les expressions :

$$E = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{64^3}\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16}\sqrt[3]{16^4}\sqrt[20]{2048}} \qquad F = \frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

3.3. (1) Dans un repère orthonomé $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer les graphes des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto x^2$ b) $x \mapsto x^3$

c) $x \mapsto x^{-1}$ d) $x \mapsto x^{-2}$

(2) Ecrire les équations des tangentes aux courbes représentant les fonctions au point d'abscisse $x = 1$. Tracer ces tangentes.
(3) Même question pour le point d'abscisse $x = -2$.

3.4. Tracer succinctement les graphes des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}_+^*$:

a) $x \mapsto x^{1/4}$ b) $x \mapsto x^{-1/2}$ c) $x \mapsto x^{4/3}$

d) $x \mapsto x^{-2/3}$ e) $x \mapsto x^{3/5}$ f) $x \mapsto x^{7/3}$

3.5. (1) Etudier et tracer dans un repère orthonomé le graphe représentant la fonction f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x^{1/3} + \frac{1}{x^{1/3}}.$$

(2) Montrer que le graphe de f admet un point d'inflexion dont on calculera les coordonnées.
Un *point d'inflexion* est un point du graphe pour lequel la dérivée seconde s'annule et change de signe.

3.6. Etudier la fonction f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et construire son graphe.
Indication : Pour déterminer le signe de la dérivée de f, on sera amené à étudier la fonction

$$g : x \mapsto g(x) = 2x\sqrt{x} - 1.$$

3.7. (1) Tracer succinctement le graphe de la fonction

$$g : x \mapsto x^{4/3}$$

et résoudre dans $\mathbf{R}_+^*$ l'équation

$$x^{4/3} - 16 = 0.$$

(2) Etudier ensuite la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$x \mapsto f(x) = x + \frac{48}{x^{1/3}}.$$

3.8. (Extrait P.2. 06-07 et 07-08.)
Pour $a > 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sqrt{a^5}\,\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} \qquad B = \frac{(-a^2)^3\,(bc)^2c^{-3}}{(ab)^3(-ac)^{-2}} \qquad C = \frac{\sqrt{a}}{a^{1/6}\,\sqrt[3]{a}} \quad \text{et} \quad D = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a^{7/6}\,\sqrt[3]{a}}.$$

3.9. On sait que les pertes de chaleur d'un mammifère sont proportionnelles à la surface de sa peau, alors que la quantité de chaleur produite par le métabolisme interne est sensiblement proportionnelle à sa masse. Dans ces conditions, expliquer pourquoi un bébé (sphérique ou cubique) craint plus le froid qu'un adulte (dont la masse est d'environ 20 fois supérieure).

3.10. *Fractale de von Koch.*
Tracer un triangle équilatéral de coté de mesure 1, puis diviser chaque côté en trois segments de longueurs égales et substituer au tiers central les deux autres côtés du triangle équilatéral construit sur ce segment à l'extérieur du triangle initial. Réitérer la construction sur chacun des nouveaux côtés obtenus.

a. Montrer que périmètre P_n du "flocon" obtenu après la n-ième itération est $P_n = 3(\frac{4}{3})^n$. Quelle est la limite de P_n quand $n \to +\infty$?

b. Cependant remarquer que l'aire du "flocon limite" est finie.