Licence de Sciences et Technologie 1 **Année 2008-2009**

Examen du lundi 26 octobre 2009

EM11 - Culture Scientifique de Base en mathématiques
Durée: 2 heures

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.
Un formulaire est donné au verso de cet énoncé, avec des développements limités usuels (cf Exercice 2).

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage **après** *la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies intercalaires. Interdiction des téléphones portables.*

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 :

(a) Soit x un réel non nul. Calculer en fonction de x (sans symbole "$\sum$") le réel $S(x) = \sum_{k=0}^{10} x^k$.

(b) La fonction S est-elle continue au point 1 ?

Exercice 2 :

(a) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes : $x \mapsto \ln(\cos(x))$, $x \mapsto e^{x^2} - 1$.

(b) Etudier la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(\cos(x))} + \frac{2}{e^{x^2}-1}\right]$.

Indication : *on commencera par réduire les fractions au même dénominateur.*

Exercice 3 : On considère la fonction : $F : x \mapsto \sin(x)\ln(\frac{1-x}{1+x})$.

(a) Etudier la parité de la fonction F.

(b) Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\frac{1-x}{1+x})$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction F.

(d) Que vaut $F^{(4)}(0)$, la dérivée quatrième en 0 de la fonction F ?

(e) Prouver que $F^{(5)}(0) = 0$.

Indication : *on pourra penser, pour les premières questions, à utiliser les propriétés de la fonction logarithme (notamment formules permettant de calculer* $\ln(\frac{a}{b})$ *ou* $\ln(ab)$ *en fonction de* $\ln(a)$ *et* $\ln(b)$*.)*

Exercice 4 :

Soit la fonction de deux variables définie, quand c'est possible, par la formule suivante :

$$f(x, y) = y\ln(3x^2 + y^2).$$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?

(b) On admet que f est dérivable par rapport à x et à y sur son domaine de définition. Calculer les deux dérivées partielles de f en un point (x, y).

(c) On fixe un couple de réels $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Que valent les réels : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$?

(d) Que vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour un couple $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x = y$?

Formulaire

Dans ce qui suit, x désigne un réel quelconque, n un entier non nul, et :
$x \mapsto \alpha(x), x \mapsto \beta(x), x \mapsto \gamma(x)$, etc.,
des fonctions ayant pour limite 0 quand x tend vers 0.
Les développements sont donnés à un ordre à chaque fois précisé.

Racine carrée, à l'ordre 4 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\alpha(x).$$

Sinus, Cosinus

à l'ordre $2n+1$, n étant un entier naturel quelconque :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\beta(x).$$

à l'ordre $2n$, n étant un entier naturel non nul quelconque :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\gamma(x).$$

Fonctions hyperboliques

à l'ordre $2n+1$, n étant un entier naturel quelconque :

$$sh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\delta(x).$$

à l'ordre $2n$, n étant un entier naturel non nul quelconque :

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Exponentielle, logarithme
En 0, à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\zeta(x).$$

En 0, à l'ordre 4 :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\eta(x).$$