Licence de Sciences et Technologie 1 **Année 2008-2009**

Examen du jeudi 13 novembre 2008, 14h-16h

EM11 - Culture Scientifique de Base en mathématiques
Durée: 2 heures

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.
Un formulaire est donné au verso de cet énoncé, avec des développements limités usuels (cf Exercice 2).

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage **après** *la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies intercalaires. Interdiction des téléphones portables.*

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 :

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + x\sqrt{5} + 1} - \sqrt{x^2 - x\sqrt{5} - 1}$.

(a) Résoudre les inéquations en $x \in \mathbb{R}$: (i) $x^2 + x\sqrt{5} + 1 \geq 0$; (ii) $x^2 - x\sqrt{5} - 1 \geq 0$.

(b) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

(c) (i) Montrer que, pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) = 2\dfrac{x\sqrt{5}+1}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{5} + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{5} - 1}}$.

(ii) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 : On pose $f(x) = \sqrt{ch(x)}$.

a) Etudier l'ensemble de définition de f et les symétries éventuelles de sa courbe.

b) Calculer le $DL_4(0)$ de f.

c) Déduire du b) la valeur de $f^{(4)}(0)$.

d) Donner le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sin^2(x)$.

e) Que vaut la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \mapsto 0, x \neq 0} \frac{\sqrt{ch(x)} - \frac{1}{4}\sin^2(x) - 1}{x^4}$?

Exercice 3 :

Soit la fonction définie sur $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[= (\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3y^2})$.

a) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$ sur D.

b) Calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

c) Montrer que f n'a aucun point critique.

d) Calculer $\dfrac{\partial}{\partial x}[\dfrac{\partial f}{\partial y}]$ sur D (on pourra utiliser le théorème de Schwarz).

Formulaire

Dans ce qui suit, x désigne un réel quelconque, n un entier non nul, et :
$x \mapsto \alpha(x), x \mapsto \beta(x), x \mapsto \gamma(x)$, etc.,
des fonctions ayant pour limite 0 quand x tend vers 0.
Les développements sont donnés à un ordre à chaque fois précisé.

Racine carrée, à l'ordre 4 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4\alpha(x).$$

Sinus, Cosinus

à l'ordre $2n+1$, n étant un entier naturel quelconque :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\beta(x).$$

à l'ordre $2n$, n étant un entier naturel non nul quelconque :

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\gamma(x).$$

Fonctions hyperboliques

à l'ordre $2n+1$, n étant un entier naturel quelconque :

$$sh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + ... + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\delta(x).$$

à l'ordre $2n$, n étant un entier naturel non nul quelconque :

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x).$$