EM11 - Culture Scientifique de Base en mathématiques
corrigé

Exercice 1 :

(a) $S(x) = \sum_{k=0}^{10} x^k = \frac{x^{11}-1}{x-1}$ si $x \neq 1$, et $S(1) = 11$, d'après les formules vues en cours. La mention de "x non nul" étant au mieux une erreur, au pire une tentative d'embrouiller le monde.

(b) La fonction S, d'après sa première définition, est un polynôme donc continue en 1 ($S(x) = 1 + x + ... + x^{10}$). On pouvait aussi remarquer que la formule écrite au (a) pour $x \neq 1$ est le taux d'accroissement entre 1 et x de la fonction $x^1 1$. Ce taux tend donc vers $(11x^{10})_{x=1} = 11 = S(1)$, en dérivant la fonction $x \mapsto x^1 1$.

Exercice 2 :

(a) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes : $x \mapsto \ln(\cos(x))$, $x \mapsto e^{x^2} - 1$.

Par composition :

Si on pose $u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} +$ reste, on obtient :

$\ln(\cos(x)) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} +$ reste

$= (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \frac{(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^3}{3} - \frac{(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^4}{4} +$ reste

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} +$ termes de degrés trop élevés

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{8} +$ termes de degrés trop élevés

$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 R_1(x)$, avec $\lim_{x\to 0} R_1(x) = 0$.

Par ailleurs on a, par une composition simple :

$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + \frac{(x^2)^4}{24} +$ reste, donc :

$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4 R_2(x)$, avec $\lim_{x\to 0} R_2(x) = 0$.

(b) D'après les propriétés de calculs sur les limites et les DL précédents, les fonctions étudiées restent de signe fixe au voisinage de 0 et la limite demandée se présente sous la forme indéterminée $(-\infty) + \infty$. Commençons par réduire au même dénominateur :

$[\frac{1}{\ln(\cos(x))} + \frac{2}{e^{x^2}-1}] = \frac{e^{x^2} - 1 + 2\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(x))(e^{x^2}-1}$.

Le numérateur, d'après le (a), s'écrit :

$(x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4 R_2(x)) + 2(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 R_1(x)) = \frac{x^4}{3} + x^4(2R_1(x) + R_2(x))$.

Par ailleurs le dénominateur s'écrit :

$\ln(\cos(x))(e^{x^2}-1) = \big(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + x^4 R_1(x)\big)\big(x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4 R_2(x)\big) = -\frac{x^4}{2} + x^4 R_3(x)$ à l'ordre 4.

Finalement le quotient s'écrit : $\frac{\frac{x^4}{3} + x^4(2R_1(x) + R_2(x))}{-\frac{x^4}{2} + x^4 R_3(x)} = \frac{\frac{1}{3} + 2R_1(x) + R_2(x)}{-\frac{1}{2} + R_3(x)}$.

Sous cette forme il n'y a plus d'indétermination et la limite cherchée vaut :

$$\frac{\frac{1}{3}+0}{-\frac{1}{2}+0} = -\frac{2}{3}.$$

Exercice 3 : On considère la fonction : $F : x \mapsto \sin(x)\ln(\frac{1-x}{1+x})$.

(a) $F(-x) = \sin(-x)\ln(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}) = -\sin(x)\ln(\frac{1+x}{1-x}) = -\sin(x)\ln(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}) = -\sin(x)[-\ln(\frac{1-x}{1+x})] = \sin(x)\ln(\frac{1-x}{1+x})) = F(x)$, en utilisant la formule $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

La fonction F est donc paire. On peut par ailleurs s'assurer que l'ensemble de éfinition de F est symétrique par rapport à 0 : $F(x)$ est défini si le quotient $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et strictement positif, donc si $(1+x)$ et $(1-x)$ sont tous les deux non nuls et de même signe. Or le premier passe de $-$ à $+$ quand $x = -1$, le second passe de $+$ à $-$ quand $x = 1$, la seule possibilité est donc $-1 < x < 1$ et $1-x, 1+x$ tous deux > 0. Ainsi $D_F =]-1, 1[$ est bien symétrique par rapport à 0, F est paire.

(b) On écrit : $\ln(\frac{1-x}{1+x}) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ grâce à la formule $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.

Comme :
$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4 R_4(x)$, et du coup (changement de variable immédiat) :
$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4 R_5(x)$,

on peut écrire :
$\ln(\frac{1-x}{1+x}) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -2x - \frac{2}{3}x^3 + x^4 R_6(x)$.

(c) On multiplie le DL de sinus à l'ordre 4 et le DL trouvé au (b), ce qui donne d'après le cours le DL cherché, en ne gardant que les termes de degrés ≤ 3 du produit :

$F(x) = (x - \frac{x^3}{6})(-2x - \frac{2}{3}x^3) + ... = -2x^2 - 2\frac{x^4}{6} - \frac{2}{3}x^4 + ... = -2x^2 - x^4 + x^4 R_7(x)$.

(d) On utilise la formule de Taylor : la partie polynomiale du DL est $F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{F^{(4)}(0)}{4!}x^4$, donc en identifiant (un DL est unique) :

$\frac{F^{(4)}(0)}{4!} = -1 \Rightarrow F^{(4)}(0) = -4! = -24$.

(e) Le DL d'une fonction paire ne contient que des termes de degrés pairs, donc en poussant le DL plus loin on n'aurait aucun terme d'ordre 5, ce qui donnerait : $\frac{F^{(5)}(0)}{5!} = 0 \Rightarrow F^{(5)}(0) = 0$.

Exercice 4 :

(a) $\ln(u)$ est défini si et seulement si $u > 0$. Ici on a $3x^2 + y^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si : $x^2 = y^2 = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$.

Le domaine de définition cherché est donc $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ (ou, géométriquement, le plan privé de l'origine).

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{6xy}{3x^2 + y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(3x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{3x^2}$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$, à cause du produit xy au numérateur, qui est nul dès qu'un des deux est nul.

(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{6xy}{3x^2 + y^2} = \frac{6x^2}{3x^2 + x^2} = \frac{6x^2}{4x^2} = \frac{3}{2}$.