Licence de Sciences et Technologie 1 **Année 2008-2009**

Examen du jeudi 13 novembre 2008, Corrigé

Exercice 1 : (a) (i) $\Delta = (\sqrt{5})^2 - 4.1.1 = 5 - 4 = 1$, les deux racines sont donc $\dfrac{-\sqrt{5} \pm 1}{2} = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$. La première inéquation est vérifiée hors de l'intervalle entre les racines, donc sur l'ensemble :

$$S_1 =]-\infty; \frac{-\sqrt{5}-1}{2}] \cup [\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; +\infty[.$$

(ii) $\Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4.(-1).1 = 5 + 4 = 9 = 3^2$, les deux racines sont donc $\dfrac{-(-\sqrt{5}) \pm 3}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$. La seconde inéquation est donc vérifiée sur l'ensemble :

$$S_2 =]-\infty; \frac{\sqrt{5}-3}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}+3}{2}; +\infty[.$$

(b) Pour tout x, $f(x)$ est définie quand les expressions sous les racines sont positives, donc quand les deux inéquations du (a) sont vraies à la fois, donc sur $S_1 \cap S_2$.

Or $S_1 \cap S_2 = (]-\infty; \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}] \cup [\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}; +\infty[) \cap (]-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}] \cup [\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}; +\infty[)$

$$=]-\infty; \frac{-\sqrt{5}-1}{2}] \cup [\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-3}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}+3}{2}; +\infty[.$$

Ce résultat est dû à l'ordre des 4 racines :

$$\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}-3}{2} < \frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

En effet : $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \iff -\sqrt{5}-1 < \sqrt{5}-3 \iff 2 = 3-1 < 2\sqrt{5} \iff 1 < \sqrt{5}$.

(c) (i) On utilise : $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

On a donc :

$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2+x\sqrt{5}+1} + \sqrt{x^2-x\sqrt{5}-1})(\sqrt{x^2+x\sqrt{5}+1} - \sqrt{x^2-x\sqrt{5}-1}) &= \sqrt{x^2+x\sqrt{5}+1}^2 - \sqrt{x^2-x\sqrt{5}-1}^2 \\ &= x^2+x\sqrt{5}+1-(x^2-x\sqrt{5}-1) \\ &= 2x\sqrt{5}+2.\end{aligned}$$

D'où la formule demandée.

(ii) la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ se présente sous la forme indéterminée "$+\infty - (+\infty)$" sous chaque racine. Utilisons la forme trouvée au (i) en factorisant en haut et en bas par le terme de plus haut degré (et en remarquant par exemple que $\sqrt{x^2+x\sqrt{5}+1} = \sqrt{x^2(1+\dfrac{\sqrt{5}}{x}+\dfrac{1}{x^2})} = x\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{5}}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et idem pour l'autre racine) :

On a : $$\begin{aligned}f(x) &= 2\frac{x\sqrt{5}+1}{\sqrt{x^2+x\sqrt{5}+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{5}-1}} \\ &= 2\frac{x(\sqrt{5}+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x}-\frac{1}{x^2}})}. \\ &= 2\frac{\sqrt{5}+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x}-\frac{1}{x^2}}} \longrightarrow 2\frac{\sqrt{5}+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 2\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

quand $x \longrightarrow +\infty$.

Exercice 2 : a) La fonction ch est paire et définie sur $\mathbb{R}$, avec $\forall x, ch(x) \geq 1$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et paire..

b) $ch(0) = 1$, on compose donc le $DL_4(0)$ de ch : $ch(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + x^4\zeta(x)$, par le $DL_4(1)$ de $t \mapsto \sqrt{t}$ ou, ce qui revient au même, par les $DL_4(0)$ de $u \mapsto \sqrt{1+u}$ (mais en prenant "$u = ch(x) - 1$") :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + u^4\alpha(u).$$

Deux remarques :

(i) on néglige d'emblée (c'est-à-dire on fait rentrer dans le reste), comme on l'a vu dans le cours, tous les termes de degrés > 4 ;

(ii) Comme $u = ch(x) - 1$ commence par un terme en x^2, les termes en u^3 et u^4 sont au moins en x^6, x^8 donc ne servent à rien.

On trouve :

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - \frac{1}{8}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)^2 + \text{Reste} \\ &= 1 + \frac{1}{4}x^2 + (\frac{1}{48} - \frac{1}{8}(\frac{1}{2})^2)x^4 + \text{Reste} \\ &= 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + x^4\eta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.\end{aligned}$$

c) D'après la formule de Taylor, et le fait que la fonction est indéfiniment dérivable, le $DL_4(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + x^4\eta(x).$$

Comme le $DL_4(0)$ est unique, on aura : $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = \dfrac{1}{96} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \dfrac{4!}{96} = \dfrac{24}{96} = \dfrac{1}{4}$.

d) Ce DL se calcule par élévation au carré du $DL_4(0)$ de $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\theta(x)$, qui résulte du formulaire et du fait que le terme en x^4 est nul. Là encore on peut d'emblée négliger les termes de degrés > 4.

On trouve : $\sin^2(x) = (x - \frac{1}{6}x^3)^2 +$ Reste

$$= x^2 - 2x\frac{1}{6}x^3 + \text{ Reste}$$
$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\iota(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\iota(x) = 0.$$

e) L'utilisation des DL calculés précédemment permet de lever l'indétermination (de la forme "0/0") de cette limite. Par addition on a :

$$\sqrt{ch(x)} - \frac{1}{4}\sin^2(x) - 1 = (1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4) - \frac{1}{4}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) - 1 + x^4\kappa(x)$$
$$= (1-1) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})x^2 + (-\frac{1}{96} + \frac{1}{4}\frac{1}{3})x^4 + x^4\kappa(x)$$
$$= \frac{7}{96}x^4 + x^4\kappa(x).$$

Si on divise ceci par x^4, il reste $\frac{7}{96} + \kappa(x)$, où $\lim_{x\to 0}\kappa(x) = 0$, la limite cherchée est donc $\frac{7}{96}$.

Exercice 3 :

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(\ln(x+\sqrt{x^2+3y^2})) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+\sqrt{x^2+3y^2})}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}$ d'après la formule de dérivation d'une composée : $[ln(u(t))]' = \frac{u'(t)}{u(t)}$,

$$= \frac{1 + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3y^2)}{2\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}} \text{ avec cette fois } [\sqrt{u(t)}]' = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}},$$
$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+3y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}, \text{ pour rassembler les fractions du haut,}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+3y^2}+x}{\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \text{ en simplifiant enfin par les expressions identiques.}$$

b) Le Calcul est similaire mais, cette fois, cela ne se simplifie pas.

$\frac{\partial f}{\partial y}(\ln(x+\sqrt{x^2+3y^2})) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+\sqrt{x^2+3y^2})}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}$ toujours d'après : $[ln(u(t))]' = \frac{u'(t)}{u(t)}$,

$$= \frac{0 + \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3y^2)}{2\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}, \text{ car } \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0, \text{ } x \text{ étant laissé constant quand on dérive par rapport à } y,$$
$$= \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+3y^2}}}{x+\sqrt{x^2+3y^2}}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+\sqrt{x^2+3y^2})}.$$

c) D'après l'expression trouvée au (a), $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est l'inverse d'un réel > 0, ne s'annule jamais. Les points critiques étant ceux où les deux dérivées partielles s'annulent, il n'y en a pas.

d) D'après le théorème de Schwarz : $\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial y}](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial x}](x,y)$ sur D. On utilise le (a), plus facile à dériver.

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial y}](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial x}](x,y)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}[\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}],$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}[x^2+3y^2]^{-\frac{1}{2}},$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial y}[x^2+3y^2]^{-\frac{3}{2}}, \text{ car } [u(t)^{-\frac{1}{2}}]' = -\frac{1}{2}u'(t)[u(t)^{-\frac{1}{2}-1}] = -\frac{1}{2}u'(t)[u(t)^{-\frac{3}{2}}]$$
$$= -\frac{1}{2}(2y)[x^2+3y^2]^{-\frac{3}{2}},$$
$$= -y[x^2+3y^2]^{-\frac{3}{2}}.$$